

Modelación de series temporales en el sector productivo del Norte de Santander



Universidad Francisco
de Paula Santander
Vigilada Mineducación

Henry de Jesús Gallardo Pérez
Jhan Piero Rojas Suárez
Oscar Alberto Gallardo Pérez

**MODELACIÓN DE SERIES
TEMPORALES EN EL SECTOR
PRODUCTIVO DEL NORTE
DE SANTANDER**

HENRY DE JESÚS GALLARDO PÉREZ
JHAN PIERO ROJAS SUÁREZ
OSCAR ALBERTO GALLARDO PÉREZ

*UNIVERSIDAD
FRANCISCO DE PAULA SANTANDER*

Gallardo Pérez, Henry de Jesús

Modelación de series temporales en el sector productivo del Norte de Santander / Henry de Jesús Gallardo Pérez, Jhan Piero Rojas Suárez, Oscar Alberto Gallardo Pérez. -- 1a. ed. -- Bogotá: Universidad Francisco de Paula Santander, 2019.

100 p.

ISBN 978-958-8489-88-9

1. Econometría – Casos - Norte de Santander 2. Norte de Santander - Aspectos económicos - Modelos econométricos I. Rojas Suárez, Jhan Piero II. Gallardo Pérez, Óscar Alberto III.

Título

IV. Serie

CDD: 330.900727 ed. 23

CO-BoBN- a1048111



Colección: Ciencias básicas

Área: Matemáticas



**Universidad Francisco
de Paula Santander**

Vigilada Mineducación

- ▶ Henry De Jesús Gallardo Pérez
- ▶ Jhan Piero Rojas Suárez
- ▶ Oscar Alberto Gallardo Pérez

© Ecoe Ediciones Limitada
info@ecoediciones.com
www.ecoediciones.com
Carrera 19 # 63C 32, Tel.: 248 14 49
Bogotá, Colombia

Primera edición: Bogotá, octubre de 2019

ISBN: 978-958-8489-88-9

Coordinación editorial: Angélica García Reyes
Corrección de estilo: Carolina Páez
Diagramación: Magda Barrero
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz
Impresión: DGP Editores
Calle 63 # 70 D -34

*Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.*

Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados

CONTENIDO

PRÓLOGO	XIII
INTRODUCCIÓN	XV
CAPÍTULO 1. SERIES TEMPORALES	1
1.1. Definición	1
1.2. Métodos para modelar series temporales	3
1.3. Método estructural para el análisis de series temporales.....	4
1.3.1. Tendencia a largo plazo	4
1.3.2. Efecto ciclo	4
1.3.3. Efecto estacional.....	5
1.3.4. Variación irregular	6
1.3.5. Construcción del modelo.....	6
1.4. Método de <i>Box y Jenkins</i> para el análisis de series temporales.....	7
1.4.1. Procesos estocásticos	7
1.4.2. Procesos estacionarios	8
1.4.3. Modelo ARIMA.....	9
1.4.3.1. Modelo autorregresivo.....	9
1.4.3.2. Procesos de promedio móvil.....	9
1.4.3.3. Procesos ARIMA (p,d,q)	10
1.4.3.4. Comportamiento típico de la FAC y la FACP.....	10
1.4.3.5. Procesos no estacionarios.....	12
1.4.3.6. Procesos estacionales	13
1.4.3.7. Datos faltantes.....	13
1.4.4. Construcción de modelos para series univariadas	13
1.5. Estructura fractal de series temporales	15

1.5.1. Movimiento browniano.....	15
1.5.2. Distribuciones de probabilidad	16
1.5.2.1. Distribuciones estables	16
1.5.2.2. Distribuciones fractales	17
1.5.2.3. Movimiento browniano fraccional	17
1.5.3. Análisis R/S (rango estandarizado o reescalado).....	17
1.5.3.1. Índice de escala temporal, n	17
1.5.3.2. Rango	18
1.5.3.3. Rango estandarizado.....	18
1.5.4. El exponente <i>Hurst</i>	18
1.5.5. Ciclos no periódicos y V-análisis	21
1.5.5.1. Ciclos no periódicos.....	21
1.5.5.2. La estadística V	21
CAPÍTULO 2. SIMULACIÓN DE SERIES TEMPORALES	23
2.1. Proceso de ruido blanco gaussiano.....	23
2.2. Proceso caótico.....	26
2.3. Proceso AR(1).....	29
2.4. Proceso MA(2)	33
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES	39
3.1. Índice de Precios al Consumidor (IPC) - Cúcuta.....	39
3.1.1. Ajuste de un modelo estructural	41
3.1.2. Ajuste de un modelo ARIMA.....	43
3.1.3. Estructura fractal.....	46
3.2. Índice de Precios al Consumidor (IPC) – Colombia	48
3.2.1. Ajuste de un modelo estructural	49
3.2.2. Ajuste de un modelo ARIMA.....	52
3.2.3. Estructura fractal.....	55
3.3. Consumo residencial de energía eléctrica en Cúcuta.....	57
3.3.1. Ajuste de un modelo estructural	58
3.3.2. Ajuste de un modelo ARIMA.....	60
3.3.3. Estructura fractal.....	63
3.4. Consumo residencial de energía eléctrica en Norte de Santander	65
3.4.1. Ajuste de un modelo estructural	66
3.4.2. Ajuste de un modelo ARIMA	68
3.4.3. Estructura fractal.....	71
3.5. Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander	72
3.5.1. Ajuste de un modelo estructural	73
3.5.2. Ajuste de un modelo ARIMA	75
3.5.3. Estructura fractal.....	78

3.6. Índice de Costos de Construcción de Vivienda (ICCV) en Cúcuta.....	80
3.6.1. Ajuste de un modelo estructural	81
3.6.2. Ajuste de un modelo ARIMA	83
3.6.3. Estructura fractal.....	86
3.7. Movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.....	88
3.7.1. Ajuste de un modelo estructural	89
3.7.2. Ajuste de un modelo ARIMA	91
3.7.3. Estructura fractal.....	94
CONCLUSIONES	97
BIBLIOGRAFÍA	99

ÍNDICE DE GRÁFICAS

GRÁFICA 1.	Consumo de energía eléctrica residencial en Cúcuta (GWH).	2
GRÁFICA 2.	Variación cíclica en una serie temporal.	5
GRÁFICA 3.	Variación estacional en una serie temporal.	5
GRÁFICA 4.	Simulación de FAC para procesos ARMA.	11
GRÁFICA 5.	Proceso para estimación de modelos ARIMA.	15
GRÁFICA 6.	Paseo aleatorio o movimiento browniano.	16
GRÁFICA 7.	Proceso de ruido blanco.	23
GRÁFICA 8.	Distribución empírica de un proceso de ruido blanco.	24
GRÁFICA 9.	FAC y FACP de un proceso de ruido blanco.	24
GRÁFICA 10.	Estructura fractal de un proceso ruido blanco.	25
GRÁFICA 11.	Proceso caótico.	26
GRÁFICA 12.	Distribución empírica de un proceso caótico.	27
GRÁFICA 13.	FAC y FACP de un proceso caótico.	27
GRÁFICA 14.	Estructura fractal de un proceso caótico.	28
GRÁFICA 15.	Proceso simulado AR(1).	29
GRÁFICA 16.	Proceso simulado AR(1), primera diferencia.	30
GRÁFICA 17.	FAC y FACP del proceso AR(1) simulado.	31
GRÁFICA 18.	Análisis de residuales modelo estimado AR(1).	31
GRÁFICA 19.	Estructura fractal de un proceso AR(1) simulado.	32
GRÁFICA 20.	Proceso simulado MA(2).	33
GRÁFICA 21.	FAC y FACP del proceso MA(2) simulado.	34
GRÁFICA 22.	Análisis de residuales modelo estimado MA(2).	35
GRÁFICA 23.	Estructura fractal de un proceso MA(2) simulado.	36
GRÁFICA 24.	Inflación anual en Cúcuta.	40
GRÁFICA 25.	Variación mensual del IPC en Cúcuta.	40
GRÁFICA 26.	Índice estacional para IPC-Cúcuta.	41
GRÁFICA 27.	Estimación de la recta de tendencia, IPC-Cúcuta.	42
GRÁFICA 28.	Estimación de la curva de tendencia, IPC-Cúcuta.	42
GRÁFICA 29.	Componente aleatorio del IPC-Cúcuta.	43
GRÁFICA 30.	Serie IPC_CUC diferenciada.	43
GRÁFICA 31.	FAC y FACP de la serie IPC_CUC, dif. 1.	44
GRÁFICA 32.	FAC y FACP de la serie IPC_CUC, dif 1,12.	44
GRÁFICA 33.	FAC y FACP de los residuales.	45
GRÁFICA 34.	Distribución empírica de los residuales.	46
GRÁFICA 35.	Estimación del coeficiente de Hurtz IPC-Cúcuta.	47
GRÁFICA 36.	Estadística V para IPC Cúcuta.	48
GRÁFICA 37.	Inflación anual en Colombia.	49
GRÁFICA 38.	Variación mensual del IPC en Colombia.	49
GRÁFICA 39.	Índice estacional para IPC-Colombia.	50

GRÁFICA 40.	Estimación de la recta de tendencia, IPC-Colombia.	51
GRÁFICA 41.	Estimación de la curva de tendencia, IPC-Colombia.	51
GRÁFICA 42.	Componente aleatorio del IPC-Colombia.....	52
GRÁFICA 43.	Serie IPC_NAL diferenciada.	52
GRÁFICA 44.	FAC y FACP de la serie IPC_NAL, dif. 1.....	53
GRÁFICA 45.	FAC y FACP de la serie IPC_NAL, dif. 1,12.....	53
GRÁFICA 46.	FAC y FACP de los residuales.	54
GRÁFICA 47.	Distribución empírica de los residuales.....	55
GRÁFICA 48.	Estimación del coeficiente de Hurtz IPC-Nacional.....	56
GRÁFICA 49.	Estadística V para IPC Nacional.....	57
GRÁFICA 50.	Consumo mensual de energía eléctrica residencial en Cúcuta.	58
GRÁFICA 51.	Índice estacional - Consumo de energía en Cúcuta.....	59
GRÁFICA 52.	Estimación de la recta de tendencia, consumo de Energía en Cúcuta.	59
GRÁFICA 53.	Pronóstico del consumo de energía eléctrica en Cúcuta.....	60
GRÁFICA 54.	Serie diferenciada del consumo de energía eléctrica en Cúcuta.	61
GRÁFICA 55.	FAC y FACP, consumo de energía eléctrica en Cúcuta.....	61
GRÁFICA 56.	FAC y FACP residuales al modelo de consumo de energía eléctrica de Cúcuta.	62
GRÁFICA 57.	Distribución empírica de residuales al modelo de consumo de energía eléctrica en Cúcuta.	63
GRÁFICA 58.	Estimación del coeficiente de Hurtz – Consumo de energía eléctrica – Cúcuta.	63
GRÁFICA 59.	Estadística V – Consumo de energía eléctrica – Cúcuta.....	64
GRÁFICA 60.	Consumo mensual de energía eléctrica residencial por estrato en Norte de Santander.	65
GRÁFICA 61.	Consumo mensual de energía eléctrica residencial en Norte de Santander.	66
GRÁFICA 62.	Valor del índice estacional del consumo de energía eléctrica NS.....	66
GRÁFICA 63.	Estimación de la recta de tendencia - Consumo de Energía Eléctrica en Norte de Santander.....	67
GRÁFICA 64.	Estimación de pronósticos para consumo de energía eléctrica NS.....	67
GRÁFICA 65.	Serie diferenciada, consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.	68
GRÁFICA 66.	FAC y FACP de la serie de consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.	68
GRÁFICA 67.	FAC y FACP de residuales.	69
GRÁFICA 68.	Distribución empírica de residuales al modelo de consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.	70

GRÁFICA 69.	Estimación del coeficiente de Hertz - Consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.....	71
GRÁFICA 70.	Estadística V - Consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.....	72
GRÁFICA 71.	Sacrificio mensual de ganado vacuno en Norte de Santander.	73
GRÁFICA 72.	Valor del índice estacional - Sacrificio de ganado vacuno – NS.	74
GRÁFICA 73.	Estimación de la recta de tendencia - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.....	74
GRÁFICA 74.	Estimación de pronósticos - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.....	75
GRÁFICA 75.	Serie diferenciada - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.....	76
GRÁFICA 76.	FAC y FACP - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.....	76
GRÁFICA 77.	Distribución empírica de residuales - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.....	77
GRÁFICA 78.	FAC y FACP residuales del modelo de Sacrificio de Ganado Vacuno – NS.....	78
GRÁFICA 79.	Estimación del coeficiente de Hertz - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.....	79
GRÁFICA 80.	Estadística V - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.....	80
GRÁFICA 81.	Índice de Costos de Construcción de Vivienda (ICCV) en Cúcuta.....	81
GRÁFICA 82.	Estimación del índice estacional - ICCV – Cúcuta.....	81
GRÁFICA 83.	Estimación de la recta de tendencia - ICCV – Cúcuta.....	82
GRÁFICA 84.	Estimación de pronósticos del ICCV Cúcuta.....	82
GRÁFICA 85.	Serie diferenciada para ICCV Cúcuta.....	83
GRÁFICA 86.	FAC y FACP - ICCV de Cúcuta.....	83
GRÁFICA 87.	Distribución empírica de residuales del modelo ICCV – Cúcuta.....	85
GRÁFICA 88.	FAC y FACP de residuales del modelo ICCV – Cúcuta.....	86
GRÁFICA 89.	Estimación del coeficiente de Hertz - ICCV – Cúcuta.....	86
GRÁFICA 90.	Estadística V – ICCV – Cúcuta.....	87
GRÁFICA 91.	Movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.....	88
GRÁFICA 92.	Estimación del índice estacional - Movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.....	89
GRÁFICA 93.	Estimación de recta de tendencia - Movimiento del parque urbano Automotor de Pasajeros en Cúcuta.....	90

GRÁFICA 94.	Estimación de pronósticos - Movimiento del parque urbano automotor de pasajeros – Cúcuta.	90
GRÁFICA 95.	Serie diferenciada - Movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.	91
GRÁFICA 96.	FAC y FACP movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.....	91
GRÁFICA 97.	Distribución empírica de los residuales del modelo movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.	93
GRÁFICA 98.	FAC y FACP residuales del modelo movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.	94
GRÁFICA 99.	Estimación del coeficiente de Hurtz - Parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.	94
GRÁFICA 100.	Estadística V - Parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.	95

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1.	Modelos de series temporales univariadas.	10
TABLA 2.	Comportamiento de las funciones FAC y FACP.	11
TABLA 3.	Estimación de exponente Hurts para un proceso de ruido blanco.	25
TABLA 4.	Estimación de exponente Hurts para un proceso caótico.....	28
TABLA 5.	Estadísticas para residuales de un proceso estimado AR(1).	32
TABLA 6.	Estimación del coeficiente Hurts para un proceso AR(1) simulado.	32
TABLA 7.	Estadísticas para residuales de un proceso estimado MA(2)	35
TABLA 8.	Salida de SPSS.	36
TABLA 9.	Estimación del coeficiente de Hertz IPC-Cúcuta.	47
TABLA 10.	Estimación del coeficiente de Hertz. IPC-Nacional	56
TABLA 11.	Estimación del coeficiente de Hertz - Consumo de energía eléctrica en- Cúcuta.....	64
TABLA 12.	Prueba de normalidad para los residuales.	70
TABLA 13.	Estimación del coeficiente de Hertz - Consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.....	71
TABLA 14.	Prueba normalidad de residuales - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.....	78
TABLA 15.	Estimación del coeficiente Hertz - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.....	79
TABLA 16.	Prueba de normalidad de residuales del modelo ICCV - Cúcuta.....	85
TABLA 17.	Estimación del coeficiente de Hertz - ICCV en Cúcuta.	87
TABLA 18.	Prueba de normalidad de residuales del modelo movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.....	93
TABLA 19.	Estimación del coeficiente de Hertz - Parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.....	95



PRÓLOGO

Luego de un arduo y tesonero trabajo se publica la primera edición del libro *Modelación de series cronológicas en el sector productivo*. Este libro está constituido por tres grandes tópicos que abordan, estadísticamente, la definición, la simulación y el análisis de las denominadas series temporales.

La presente obra reúne diversas contribuciones de estudiantes, docentes y colaboradores, las cuales permitieron que un grupo de expertos profesionales liderados por los profesores Henry De Jesús, Jhan Piero y Oscar Alberto llevaran a cabo, muy acertadamente, todos los procesos implícitos en la producción de una obra de esta envergadura.

Uno de los aspectos más relevantes de este libro viene dado por el versátil desarrollo didáctico-metodológico utilizado para presentar los contenidos relativos a series cronológicas. Como consecuencia de ello, destaca la excelsa sencillez con la que se introducen los conceptos, definiciones y aplicaciones. Este aspecto, indudablemente, constituye una manera interesante de facilitar a los lectores la apropiación de la información incluida en cada una de las secciones del libro.

El lector puede tener la certeza de que el presente libro **NO** es un constructo meramente teórico que versa sobre los registros históricos (series temporales) de entes vinculados con el sector productivo. Por el contrario, este libro **SÍ** es una obra auto-contenida que representa una perfecta conjugación de teoría y práctica

en el contexto de las series cronológicas, es decir, se trata de una obra elaborada con base en un lenguaje ameno que, sin menoscabo de la rigurosidad, implementa aplicaciones (con datos simulados o reales) basadas en los fundamentos teóricos propios de las mencionadas series.

Las referidas aplicaciones permiten la emisión de pronósticos útiles para tomar decisiones de una manera más racional que puede contribuir al buen desempeño de las personas naturales o jurídicas que hacen parte del mencionado sector.

Finalmente, se espera que los lectores puedan disfrutar de este excelente libro conformado por saberes y prácticas que pretenden elevar la calidad del proceso denominado toma de decisiones el cual debe estar apoyado en la caracterización de fenómenos, propios del sector productivo en los que son protagonistas las series cronológicas.

Miguel Vera, PHD en investigación e Innovación
Universidad Simón Bolívar, Facultad de Ciencias Básicas y Biomédicas

INTRODUCCIÓN

El análisis de series temporales o series cronológicas permite identificar la estructura del comportamiento, a lo largo del tiempo, de las variables que son objeto de estudio, a su vez, aporta fundamentos estadísticos para la realización de pronósticos confiables. Dichos pronósticos constituyen una herramienta que establece estimaciones cuantitativas de eventos futuros con una alta probabilidad de anticipar valores cercanos a las realizaciones verdaderas de variables en escenarios posteriores.

En la actividad diaria se encuentran frecuentemente variables que presentan cambios aleatorios en el tiempo. Es así como, de manera usual, una gran cantidad de información acerca de las características específicas de ciertos fenómenos es recopilada metódicamente a intervalos de tiempos fijos, con fines de análisis, para después llevar a cabo la planeación y la toma de decisiones.

El análisis de series temporales hace referencia a la utilización de métodos estadísticos para examinar conjuntos de datos que se observan, fundamentalmente, a través del tiempo, los cuales no obedecen a ningún plan de muestreo o diseño experimental. Este análisis implica extraer información de las observaciones realizadas para tener un pronóstico confiable.

Al conjunto de realizaciones de la variable aleatoria, observada y recopilada a lo largo de un periodo a intervalos periódicos regulares, se le conoce como una se-

rie de tiempo o serie cronológica. Existen diferentes métodos de análisis de series cronológicas, entre los cuales se destacan el clásico, la metodología de Box y Jenkins y el de la estructura fractal de la serie. El primero de ellos, explica el comportamiento de los componentes de los valores de la serie como una función del tiempo, para ello construye un modelo matemático.

El segundo, el método de Box y Jenkins, describe el comportamiento de la serie en función de los valores observados en el pasado y de su conducta aleatoria. Esta metodología ha demostrado ser una técnica altamente eficiente para hacer predicciones en situaciones en que el patrón inherente a la serie es muy complejo y difícil de desentrañar. Por último, el análisis de la estructura fractal de la serie cronológica permite, entre otras cosas, identificar la existencia de ciclos aleatorios en la serie y estimar su periodo esperado.

El propósito fundamental de esta investigación es presentar un referente teórico para la implementación de dichas metodologías al momento de analizar una serie temporal, ilustrar su aplicabilidad mediante el análisis de procesos simulados y aplicar estos métodos teóricos al análisis de series temporales registradas en el departamento del Norte de Santander y en la ciudad de Cúcuta. El énfasis está hacia la caracterización, construcción y validación de modelos que explican el comportamiento de series relacionadas con el sector económico y productivo del departamento.

El libro se estructura en tres partes: la primera presenta fundamentos teóricos para el análisis de series cronológicas, incluyendo el modelo estructural, el *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) y la estructura fractal; en la segunda sección, se realizan simulaciones para identificar, comprender y aplicar la temática desarrollada; y, por último, se realiza el análisis de series económicas: índice de precios al consumidor y consumo de energía en energía eléctrica residencia en Norte de Santander y en Cúcuta; sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander; índice de costos de construcción de vivienda, y movimiento del parque automotor de pasajeros en la ciudad de Cúcuta.

CAPÍTULO 1

SERIES TEMPORALES

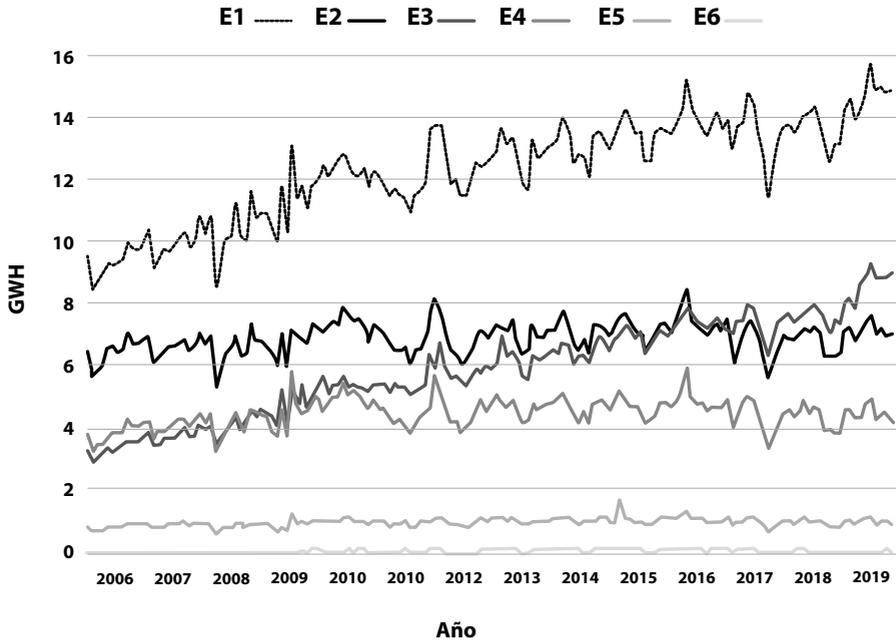
1.1. Definición

Una serie temporal, también llamada serie de tiempo o serie cronológica, consiste en un conjunto de datos provenientes de realizaciones de una variable aleatoria que se han recolectado sucesivamente en el tiempo (Peña, 1990; Peña, 2010). A manera de ejemplo, en la gráfica 1 se muestra la evolución mensual (en GWH) del consumo de energía eléctrica residencial en Cúcuta durante los últimos trece años, teniendo en cuenta los estratos socioeconómicos.

Una aproximación visual de las series permite identificar una tendencia creciente en los estratos 1 y 2, mientras que en los demás tiende a permanecer constante. El consumo varía muy poco en los estratos 5 y 6 con relación a lo observado en los demás estratos. Esto se ampliará en el capítulo 3, donde se estiman modelos para analizar esta serie.

Por otro lado, la serie temporal se compone de un conjunto de realizaciones de una variable aleatoria (Z), cada una de ellas es observada en un periodo de tiempo (t), llevando a cabo un proceso estocástico en tiempo discreto. Al valor de la variable en el periodo t se le anota Z_t , se asume que existe equiespaciamento entre las observaciones y que estas corresponden a puntos discretos en el tiempo, por eso los datos recolectados se pueden considerar sucesiones finitas de realizaciones de variables estocásticas.

Gráfica 1. Consumo de energía eléctrica residencial en Cúcuta (GWH).



Fuente: Sistema de información minero energético colombiano. SIMEC.

Serie temporal: $\{Z_t\}_T = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_t, \dots\}$

En cada periodo de tiempo se observa una sola realización de la variable aleatoria, así, por ejemplo, al observar el caudal de un río, cada día (t) tiene una variable aleatoria (Z_t) que representa el caudal del río de ese día; sin embargo, cuando este finaliza se registra un solo valor del caudal constituido como (z_t), solo queda una muestra de tamaño de uno de todos los posibles valores que hubiese podido tomar la variable aleatoria ese día. De manera similar sucede si dicha variable corresponde a las ventas diarias de un almacén de cadena, dado que al final del día se tiene una sola realización: las ventas realizadas durante la jornada (Peña, 2010; Box y Jenkins, 1969).

En consecuencia, puede afirmarse que no existe un plan de muestreo, pero se espera que la observación Z_2 esté influenciada por Z_1 y así sucesivamente, además, que cada valor Z_t incida en los valores del futuro. *A priori*, no es posible asumir independencia entre observaciones, dado que lo más probable es que los datos de una serie temporal tengan dependencia. Esto implica que estén correlacionados dos a dos, no necesariamente en forma consecutiva. Por lo anterior, se espera que el valor de la serie, en un momento del tiempo, dependa de los valores del pasado, bien sea porque son los del periodo inmediatamente anterior o de valores con varios periodos de retardo (Gao *et al.*, 2007).

El objetivo primordial del análisis de series temporales es utilizar métodos estadísticos para construir un modelo que permita describir ese conjunto de datos observados a través del tiempo, que no obedecen a ningún plan de muestreo ni a un diseño de experimentos. El proceso puede resumirse de la siguiente manera: los datos son analizados, se identifica su comportamiento, se estima un modelo que lo describa, se valida el modelo y, si es acertado, se utiliza para realizar pronósticos intertemporales (periodos futuros por ser pronosticados), es decir, para predecir los próximos valores que tomará la serie con suficiente confiabilidad; en caso contrario, se regresa a la fase de identificación.

1.2. Métodos para modelar series temporales

El análisis de series temporales, que consiste en la utilización de datos muestrales con propósitos de inferencia (estimación, toma de decisiones y predicción), resulta complejo desde el punto de vista funcional. Sin embargo, se puede identificar más como un arte que como una ciencia, aunque la mayoría de sus procedimientos están sustentados en resultados propios de la estadística-matemática que tienen validez teórica y empírica.

Especialmente, debe tenerse en cuenta que aun cuando la variable observada es la misma en cada periodo de tiempo, esta tiene una distribución de probabilidad en cada uno de esos periodos y, al observar su realización, se está examinando el valor de una muestra de tamaño uno en cada periodo. Esto es lo que genera dificultades en el análisis y modelación de series temporales.

De esta manera, la construcción de un modelo de series temporales corresponde a una estimación de sus parámetros con base en una muestra de tamaño uno; sin embargo, se ha demostrado que los diferentes modelos de series temporales se calculan mediante métodos altamente confiables. Las observaciones del fenómeno que es objeto de estudio de las series temporales, están frecuentemente correlacionadas con otra correlación que aumenta dependiendo del intervalo de tiempo entre cada par de observaciones que decrecen.

Históricamente se han desarrollado varios métodos y modelos para estimar el comportamiento intertemporal que describe una serie cronológica. En esta investigación se abordan tres de estos métodos:

- Método clásico o estructural.
- Método de Box-Jenkins.
- Método fractal.

1.3. Método estructural para el análisis de series temporales

El método clásico o método estructural para el análisis de series temporales se fundamenta en el hecho de que el conjunto de valores observados de la serie y sus variaciones se pueden explicar por medio de la interacción de cuatro elementos fundamentales que conforman su estructura (Peña, 2010; Fernández, s.f.; Alonso, s.f.):

- Tendencia a largo plazo.
- Efecto ciclo.
- Efecto estacional.
- Variación irregular.

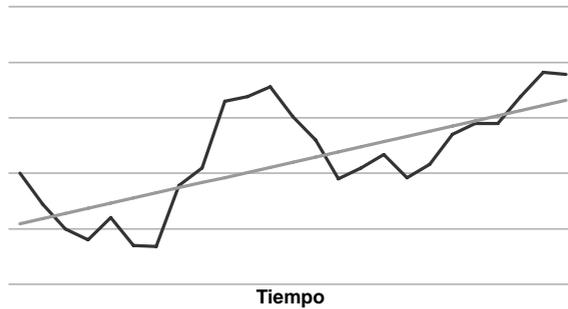
1.3.1. Tendencia a largo plazo

La tendencia en una serie cronológica se define como un patrón de movimiento general o persistente, ascendente o descendente, a largo plazo. Puede atribuirse a cambios tecnológicos, número de habitantes, nivel de riqueza, efecto de la competencia u otros factores que no llegan a producir cambios violentos en la variable observada, pero que sí producen un cambio gradual y estable sobre el tiempo. Su duración es de varios años.

Se modela la tendencia de la serie mediante un modelo de regresión, generalmente lineal (aun cuando este sea logarítmico o exponencial), en el cual la variable respuesta está constituida por los valores observados de la serie y la variable explicativa sea conformada por los índices asignados para la secuencia temporal. Un diagrama de dispersión temporal es conveniente para identificar el mejor modelo de regresión que describe la tendencia de la serie.

1.3.2. Efecto ciclo

El componente cíclico de la serie es también de orden sistemático, se identifica con movimientos periódicos a largo plazo que son muy suaves y tienen forma de ondas que siguen continuamente la curva de tendencia. Un ciclo normal de una serie consta de: un periodo de prosperidad (cúspide), seguido de periodos de recesión (contracción), depresión (sima) y recuperación (expansión o crecimiento), este puede durar varios años.

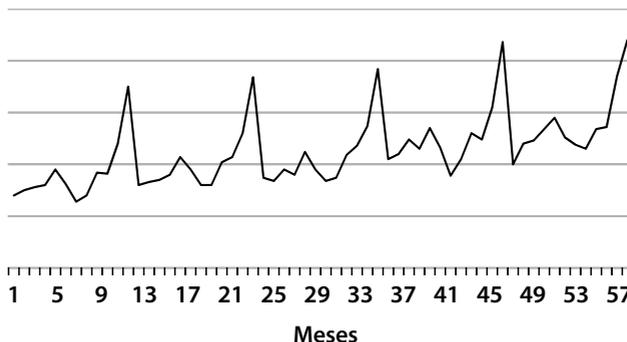
Gráfica 2. Variación cíclica en una serie temporal.

Por lo general, los efectos cíclicos pueden ser causados por cambios en la demanda de un producto o incapacidad de la oferta para satisfacerla, ciclos en los negocios o acumulación de bienes. En general, es difícil explicar cuáles son las posibles causas de dichos ciclos, hasta el punto que la gran mayoría de autores coinciden en exponer que son debido a múltiples combinaciones e interacciones de factores que influyen en el caso de las series económicas.

La construcción de un modelo para describir el comportamiento cíclico de la serie resulta bastante complejo; sin embargo, es posible darle forma gracias a la regresión sinusoidal, la cual funciona bien a mediano plazo, pero no a largo plazo, ya que las fluctuaciones cíclicas son periódicas, pero no se repiten siempre con la misma intensidad.

1.3.3. Efecto estacional

Este es un efecto sistemático caracterizado por una serie de fluctuaciones periódicas regulares que ocurren dentro de un tiempo particular en el año y que se repiten de manera similar anualmente. Su presencia se explica por las condiciones climatológicas, costumbres sociales y religiosas, entre otras.

Gráfica 3. Variación estacional en una serie temporal.

La diferencia principal entre los efectos cíclicos y los estacionales, es que estos se predicen con alta confiabilidad y ocurren en un intervalo de tiempo fijo después de la última ocurrencia, mientras que los cíclicos tienen una ocurrencia aleatoria que dificulta su predicción.

1.3.4. Variación irregular

Este componente no es sistemático y representa las fluctuaciones erráticas o residuales de la serie temporal después de haber ajustado la tendencia, el efecto cíclico y el estacional, es de corta duración y no es repetitivo. Su origen se debe a variaciones aleatorias de los datos y a la presencia de otros efectos que no son considerados en el modelo debido a que su influencia en el valor de la serie es poco relevante. Cuando se ha ajustado un buen modelo para describir el comportamiento de las variables sistemáticas, se espera que los valores de dicha variación presenten un comportamiento aleatorio.

1.3.5. Construcción del modelo

Existen dos modelos que pueden construirse con esta metodología, estos son, primero: el aditivo, el cual asume que los valores observados en las realizaciones de la serie temporal son el resultado de la adición de los cuatro componentes mencionados anteriormente. Sin embargo, este modelo se usa preferentemente para series observadas anualmente, por lo tanto se prescinde del componente estacional, utilizando así solo tres componentes. La ecuación que describe el modelo aditivo es:

$$Z_t = T_t + C_t + I_t$$

Donde Z_t es el valor observado de la serie en el periodo de tiempo t , T_t , C_t e I_t son los valores de la tendencia, el ciclo y el componente irregular en dicho periodo t , respectivamente. El segundo es el modelo multiplicativo, que explica las realizaciones de la serie mediante el producto de los cuatro componentes. Este modelo se utiliza, generalmente, para modelar series temporales en las que está presente el componente estacional; se representa mediante la siguiente ecuación:

$$Z_t = T_t * C_t * S_t * I_t$$

En la cual Z_t es el valor observado de la serie en el periodo de tiempo t , T_t , C_t , S_t e I_t , son los valores de la tendencia, el efecto ciclo, el efecto estacional y la variación irregular en ese periodo t , respectivamente. En ambos casos, el procedimiento para ajustar el modelo consiste en aislar cada uno de los efectos y modelarlo por separado; posteriormente, se realiza el pronóstico de cada componente y al final se agregan dichos valores según la función específica, con el fin de obtener el valor pronosticado para futuras realizaciones de la serie.

1.4. Método de *Box* y *Jenkins* para el análisis de series temporales

En 1969, George Box y Gwilym Jenkins, desarrollaron una nueva metodología para el análisis de series temporales. El procedimiento, denominado como Box–Jenkins, ha demostrado ser una técnica altamente eficiente para dicho análisis en situaciones en que el patrón de la serie es muy complejo y difícil de desentrañar (Box y Jenkins, 1969; Nova, 2013).

La técnica ajusta a la serie temporal un Modelo Autorregresivo Integrado de Promedio Móvil (ARIMA, por sus siglas en inglés) identificado a partir de la función de autocorrelación de la serie, cuyo componente autorregresivo explica el valor observado de la serie en función de los datos obtenidos en el pasado y el componente de promedio móvil involucra los términos de error pasados y presentes.

1.4.1. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias:

$$\{Z_t\}_{t \geq 1}$$

En este trabajo se consideran solamente procesos estocásticos discretos, por cuanto las observaciones se hacen en intervalos discretos en el tiempo. Desde este punto de vista, una serie se considera una “realización” de un proceso estocástico. En cada periodo está definida una variable aleatoria (cada una de ellas con su correspondiente varianza y valor esperado). La distribución de probabilidad de la variable aleatoria puede ser diferente cada momento, en ella se observa, en un tiempo determinado, el valor de su realización que en conjunto constituye la serie temporal.

Funciones determinísticas especiales para un proceso estocástico

Para un proceso estocástico $\{Z_t\}_t$, se pueden definir las siguientes funciones que resultan ser determinísticas (debe tenerse en cuenta que el proceso es el aleatorio):

- Función de medias: $\mu(t) = E(Z_t)$, para todo t .
A cada punto en el tiempo se le asigna el valor esperado de la variable aleatoria.
- Función de varianzas: $\sigma^2 = \text{Var}(Z_t)$, para todo t .
A cada punto en el tiempo se le asigna la varianza de la variable aleatoria.
- Función de covarianzas: $c(t_1, t_2) = \text{Cov}(Z_{t_1}, Z_{t_2})$, para todo t_1 y t_2 .

- Función de autocorrelación (FAC):

$$\rho = \frac{c(t_1, t_2)}{\sigma(t_1) \cdot \sigma(t_2)}$$

A cada par de puntos en el tiempo t_1 y t_2 , se le asigna la correlación entre las dos variables aleatorias correspondientes a esos periodos. La autocorrelación mide el grado de asociación entre valores, en una serie temporal, separados por algún retardo determinado. Así, por ejemplo, en la serie 17, 18, 19, 15, 12, 10, 8, la autocorrelación de retardo 2 es la correlación entre los pares de puntos (17,19), (18,15), (19,12), (15,10), (12,8).

- Función de Autocorrelación Parcial (FACP): presenta ciertas características que dependen del orden del proceso y del tipo de parámetros involucrados. Trata de medir la contribución del valor observado del proceso en un periodo específico del pasado para explicar dicho valor, que está en análisis, dada cierta información del proceso.¹

La función de autocorrelación determina la estructura del proceso estocástico y por ende la de la serie cronológica, asimismo es, en cierta forma, una medida de la memoria del sistema que se esté analizando. Las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial son de gran utilidad al momento de identificar el modelo que describe el comportamiento del proceso.

1.4.2. Procesos estacionarios

Un proceso estocástico $\{Z_t\}_t$ es estacionario, en sentido estricto, si las distribuciones de probabilidad conjunta de las variables aleatorias del proceso: $Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_m}$ y $Z_{t_1+k}, Z_{t_2+k}, \dots, Z_{t_m+k}$, son iguales para todo entero positivo m , para todo entero k y para todo t_1, t_2, \dots, t_m .

Por ejemplo, si $m=3$ y $k=2$, el concepto de estacionaridad estricta implica que la distribución de probabilidad conjunta de Z_1, Z_2 y Z_3 es igual a la distribución de probabilidad conjunta de las variables Z_3, Z_4 y Z_5 . En términos prácticos, se utiliza el concepto de proceso estacionario, en sentido débil, al momento de analizar una serie temporal.

1 La definición de la función de autocorrelación parcial escapa al nivel de este trabajo; sin embargo, su cálculo se realizará mediante la utilización de paquetes estadísticos.

Un proceso estocástico $\{Z_t\}_t$, es estacionario, en sentido débil, si:

- La función de medias es constante.
- La función de varianzas es constante.
- La función de covarianzas depende solamente del retardo (diferencia entre los dos índices temporales): $c(t_1, t_2) \equiv c(|t_2 - t_1|)$.

En este caso, la función de autocorrelación dependerá únicamente del retardo y se notará así: ρ_k

$$\rho_k = \rho(t, t + k)$$

Se dice que un proceso estacionario es *ruido blanco* si tiene función de medias y de autocorrelación idéntica igual a cero o función de varianzas constante.

1.4.3. Modelo ARIMA

Los modelos ARIMA se caracterizan por ser el agregado entre dos componentes del modelo, una parte autorregresiva y una parte de promedio móvil. El término integrado está relacionado con el número de diferenciaciones requeridas para estabilizar el promedio (Peña, 1990; Box y Jenkins, 1969; Gras, 2001).

1.4.3.1. Modelo autorregresivo

Un proceso autorregresivo de orden p , explica el valor actual obtenido en la serie temporal como combinación lineal de los valores precedentes más un componente aleatorio. Cuando es de orden p , AR(p) se moldea mediante la siguiente expresión:

$$Z_t = c\mu + \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + \dots + \varphi_p Z_{t-p} + a_t$$

Allí, μ representa la media del proceso, los parámetros son φ_i , los cuales, a su vez, se estiman a partir de los datos muestrales y $\{a_t\}$ es un ruido blanco. El proceso autorregresivo expresa el valor de la variable dependiente Z_t en el periodo de tiempo t , como una función sujeta a sus valores, observados en el pasado, y no como una sucesión de variables independientes, como sí lo hace el modelo de regresión lineal. Por otro lado, estos procesos se caracterizan por tener mucha memoria, lo cual, implica que, valores observados con bastante antelación, pueden incidir en el valor actual de la serie.

1.4.3.2. Procesos de promedio móvil

Los modelos de promedio móvil, *Movil Average*, fueron introducidos por Yule en 1926 y Slutsky en 1927. Su idea básica consiste en representar los valores de

un proceso estacionario $\{Z_t\}$, cuyas cifras pueden ser dependientes unas de otras como una suma finita ponderada de choques aleatorios independientes $\{a_t\}$. Es posible moldear un proceso de promedio móvil de orden q , $MA(q)$, mediante la siguiente expresión:

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

En ella, $\{a_t\}$ es un proceso ruido blanco y los θ_i son parámetros del modelo estimados a partir de la muestra. A su vez, los procesos de promedio móvil tienen una memoria muy corta, por ello los modelos adquieren utilidad cuando el valor de la serie de un periodo de tiempo dado depende de unos pocos valores que lo preceden.

1.4.3.3. Procesos ARIMA (p,d,q)

Se dice que un proceso estacionario sigue un modelo autorregresivo integrado, de promedio móvil, cuando tiene un componente autorregresivo de orden p junto con un componente de promedio móvil de orden q ; d representa el número de diferenciaciones que se deben hacer para estabilizar el promedio del proceso. Cuando dicho promedio no requiere ser estabilizado el proceso sigue un modelo ARMA. En la tabla 1 se resumen las ecuaciones que describen cada uno de los modelos descritos para series temporales univariadas.

Tabla 1. Modelos de series temporales univariadas.

Modelo estructural		Modelos AR y MA	
Modelo aditivo	$Z_t = T_t + C_t + S_t + I_t$	AR(p)	$Z_t = c\mu + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_p Z_{t-p} + a_t$
Modelo multiplicativo	$Z_t = T_t * C_t * S_t * I_t$	MA(q)	$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$
Modelo ARIMA			
El Modelo ARIMA involucra los componentes autorregresivos y de promedio móvil, previo establecimiento de que la serie es estacionaria o que se han realizado las transformaciones necesarias para obtener estacionariedad.			
ARIMA(p,d,q)	$Z_t = c\mu + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$		

1.4.3.4. Comportamiento típico de la FAC y la FACP

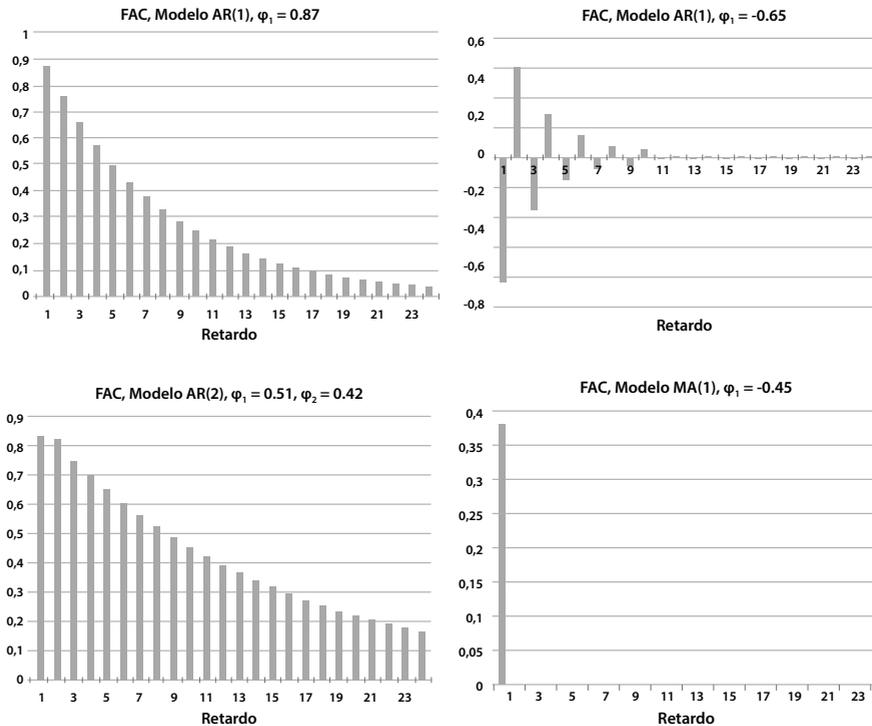
Los comportamientos típicos que presentan las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial según el tipo de modelo que describa el proceso estocástico se presentan en la tabla 2. Esta información es de gran utilidad al momento de identificar el modelo ARIMA que se ajusta a la serie.

Tabla 2. Comportamiento de las funciones FAC y FACP.

Comportamiento de la FAC y la FACP para procesos AR, MA y ARMA		
Proceso	Función de Autocorrelación - FAC	Función de Autocorrelación Parcial - FACP
AR(p)	Convergencia a cero: las autocorrelaciones forman una sucesión infinita que decrece con el retardo como mezcla de exponenciales y senoideas.	Solamente las primeras p, autocorrelaciones parciales son distintas de cero.
MA(q)	Solo las primeras q autocorrelaciones son distintas de cero.	Sucesión infinita convergente a cero. Las autocorrelaciones forman una sucesión infinita que decrece con el retardo como mezcla de exponenciales y senoideas.
ARMA(p, q)	Comportamiento irregular de las primeras q autocorrelaciones, después se forma una sucesión convergente a cero.	Sucesión infinita convergente a cero.

La función de autocorrelación es la transformada del matemático Joseph Fourier del espectrograma de la serie. Este último presenta mayor información acerca de la memoria del proceso, pero por su dificultad para calcularlo se acostumbra a utilizar la FAC, que es equivalente. A manera de ilustración, en la gráfica 4, se presentan las funciones de autocorrelación para algunos modelos ARMA.

Gráfica 4. Simulación de FAC para procesos ARMA.



1.4.3.5. Procesos no estacionarios

Un proceso estocástico no es estacionario cuando ocurre al menos una de las siguientes situaciones:

- El nivel (función de medias) no es constante.
- La varianza del proceso no es constante.

Para ajustar un modelo ARMA a un proceso estocástico se requiere que este sea estacionario. Si no lo es, deben aplicarse transformaciones a los datos a fin de conseguir la estacionaridad.

Estabilización de la varianza

Para estabilizar la varianza se puede utilizar el procedimiento de Box y Cox, que consiste en modificar la serie aplicando la transformación T_λ de la siguiente manera:

$$T_\lambda(Z_t) = \begin{cases} \frac{(Z_t - \alpha)^\lambda}{\lambda}; \lambda \neq 0 \\ \text{Log}(Z_t - \alpha); \lambda = 0 \end{cases}$$

Donde α se escoge de tal manera que si Z_t toma valores negativos, $Z_t - \alpha$ sea mayor que cero para todo t .

El valor de λ se puede hallar usando cualquiera de los siguientes métodos:

- Ensayo y error: se prueba con diferentes valores de λ hasta conseguir estabilidad en la varianza. Este método es subjetivo y bastante arriesgado para los propósitos deseados.
- Con un experto en la materia, que generalmente está relacionado con la fuente de los datos, así se indicará un valor conveniente para λ . También es un método subjetivo.
- Usando un procedimiento de máxima verosimilitud, conjuntamente con la estimación de los parámetros del modelo.
- Guerrero (2003), propone un buen método que será empleado en este trabajo cuando sea necesario.

Estabilización del nivel

Una vez estabilizada la varianza, el nivel de la serie, se establece gracias a diferenciaciones sucesivas en ella, hasta encontrar una función de medias constante; para esto se obtiene una nueva serie así:

$$\nabla^d Z_t = Z_t - Z_{t-d}$$

1.4.3.6. Procesos estacionales

Un proceso estocástico es estacional si su función de medias presenta el comportamiento de una onda. Generalmente, en series económicas, la estacionalidad es temporal y se repite periódicamente año tras año. En estos procesos, las funciones de autocorrelación tienen el problema de que, no solo reflejan la correlación entre periodos consecutivos, sino también la correlación entre dos periodos estacionales. El modelo que se construye sigue la misma metodología propuesta por Box y Jenkins, pero debe abordarse desde dos puntos de vista:

- Intra-estaciones: se observa el comportamiento de la función de autocorrelación como si no hubiese estaciones.
- Entre-estaciones: se observa la función de autocorrelación en los retardos estacionales.

El análisis precedente lleva a la formulación de un modelo “compuesto”, que involucra la estimación de parámetros no estacionales y estacionales de acuerdo con los modelos identificados desde los puntos de vista mencionados. Este es: $ARIMA(p, d, q)_s(P, D, Q)_s$, en el cual p y q representan los órdenes de los polinomios autorregresivos y de promedio móvil de la componente no estacional, y P y Q corresponden a los órdenes de los polinomios estacionales autorregresivos y de promedio móvil, respectivamente. El nivel se estabiliza mediante d , diferenciaciones no estacionales y D diferenciaciones estacionales. La longitud de la estacionalidad se representa por s .

1.4.3.7. Datos faltantes

Es posible que en una serie temporal se presenten datos faltantes, los cuales, usualmente, es imposible recuperar debido a que no se puede repetir el pasado (por ejemplo, si un día determinado no se registró la cantidad de lluvia caída sobre una región). En este caso es necesario realizar una buena estimación de los datos faltantes de la serie. Peña y Maravall (1991), Nieto y Martínez (1994) y Gallardo y Nieto (1996); entre otros, han formulado modelos y procedimientos para la estimación de datos faltantes en series temporales.

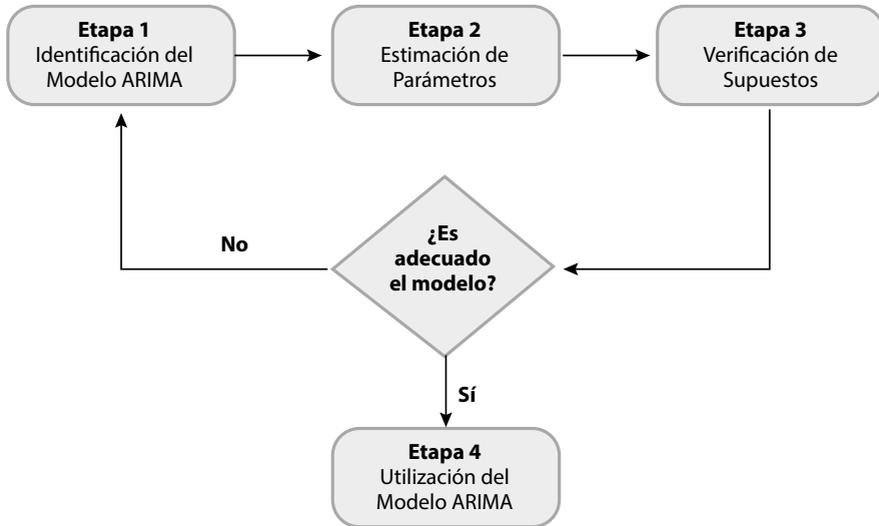
1.4.4. Construcción de modelos para series univariadas

La estrategia desarrollada por Box y Jenkins (1969) para la construcción de modelos de series temporales univariadas se puede resumir en las siguientes cuatro etapas:

- Etapa 1: identificación de un posible modelo dentro de la clase de ARIMA(p,d,q) $x(P,D,Q)_s$; es decir, determinación de los valores p, d, q, P, D, Q y s que especifiquen el modelo ARIMA apropiado para la serie en estudio, posteriormente, se lleva a cabo a partir de la observación de las funciones de autocorrelación, autocorrelación parcial y comparación de estas con los modelos teóricos. Previamente, debe verificarse que el proceso sea estacionario; de lo contrario, estabilizar la varianza y el nivel antes de estimar la FAC y la FACP.
- Etapa 2: estimación de los parámetros involucrados en el modelo a través de técnicas de estimación no lineal. Una vez identificado el modelo, se procede a estimar los correspondientes parámetros. La técnica utilizada, generalmente, es la de máxima verosimilitud, que viene incorporada a la mayoría de los paquetes computacionales.
- Etapa 3: se verifica que el modelo proporciona un ajuste adecuado y que los supuestos básicos, implícitos en él, se satisfacen; de no cumplirse los supuestos, se determinan las modificaciones necesarias y, de hecho, se repiten las etapas anteriores hasta que la verificación indique resultados aceptables. Los supuestos se verifican sobre los residuales del modelo que deben constituirse en un proceso de ruido blanco. Por lo tanto, deben ser incorrelacionados, tener función de medias cero, de varianzas constante y estar distribuidos normalmente. Adicionalmente, deben realizarse pruebas de especificación del modelo. Guerrero (2003), realiza una buena presentación acerca de la verificación de un modelo de series temporales.
- Etapa 4: uso del modelo para los fines que el investigador tenga en mente al construirlo; dichos fines son, por lo general, de pronóstico, control, simulación o explicación del fenómeno en estudio.

En consecuencia, la construcción de modelos de series temporales según la metodología de Box y Jenkins es un proceso interactivo que se puede esquematizar, tal como se aprecia en la gráfica 5.

Gráfica 5. Proceso para estimación de modelos ARIMA.



Los pronósticos para valores futuros de la serie, por lo general se realizan con base en los procedimientos incluidos en los paquetes computacionales; sin embargo, la fundamentación teórica podrá consultarse en los textos de Guerrero (2003) o Peña (2010).

1.5. Estructura fractal de series temporales

Un fractal es un objeto semigeométrico cuya estructura básica es fragmentada o irregular y se repite a diferentes escalas. Este elemento de la naturaleza puede ser descrito mediante la geometría fractal (Barnsley, 1988; Mandelbrot, 1985; Mandelbrot, 1993). Los fractales poseen una dimensión no entera y que pueden superar a su dimensión topológica (Burgos y Pérez, 1999).

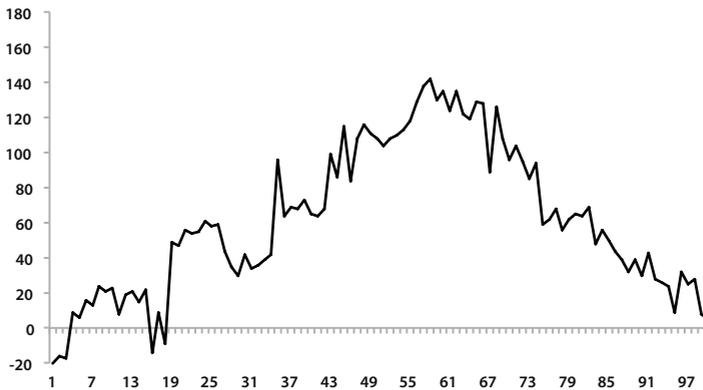
1.5.1. Movimiento browniano

El cambio temporal de una variable aleatoria es llamado “paseo aleatorio” o “movimiento browniano”, si este varía de modo incierto, se satisfacen las siguientes condiciones:

- El movimiento en cualquier instante de tiempo es independiente del movimiento en otro momento, Esto sucede si no tiene “memoria” del movimiento que ha experimentado.

- El cambio esperado de posición en el tiempo es cero. Es decir, no tiene una dirección “preferida” ni patrón de movimiento.
- La distancia esperada del cambio es mayor que cero. En otras palabras, no permanece inmóvil.

Gráfica 6. Paseo aleatorio o movimiento browniano.



1.5.2. Distribuciones de probabilidad

1.5.2.1. Distribuciones estables

Una distribución es estable si al obtener dos versiones reescaladas de la distribución su producto produce otra distribución que resulta ser también una versión reescalada de la original. En otras palabras, f es una distribución estable si para A y B existe C , tal que:

$$f\left(\frac{x}{A}\right) * f\left(\frac{x}{B}\right) = f\left(\frac{x}{C}\right)$$

La expresión “estable” se utiliza porque cuando múltiples efectos son descritos por esta distribución el efecto neto o resultante también es descrito por ella. Por lo tanto, estas son las únicas distribuciones que pueden “sobrevivir” en sistemas configurados por la contribución de numerosos factores. La curva gaussiana es un buen ejemplo de una distribución estable, las cuales pueden ser parametrizadas por cuatro parámetros que, al ser ajustados, pueden obtener la caracterización completa de la distribución estable. Desafortunadamente, excepto para dos o tres casos especiales (entre ellos el gaussiano), ninguna de estas distribuciones puede ser expresada mediante una forma analítica.

1.5.2.2. Distribuciones fractales

Las distribuciones fractales tienen la propiedad de que, cuando su correspondiente serie temporal es graficada, esta tiene una dimensión fractal. La serie temporal producida por una distribución fractal es (estadísticamente) independiente de la escala. Por ello, este es generalmente el caso presentado en distribuciones estables, con la excepción de la distribución gaussiana.

1.5.2.3. Movimiento browniano fraccional

Este movimiento se presenta en series temporales que obedecen una “ $1/f^b$ ” regla. Esto se da cuando su serie de Fourier decrece a una tasa que es proporcional a $1/f^b$, donde f es la frecuencia de la serie temporal (variable independiente en el espacio de Fourier) y b es una constante. Interesantes estudios han mostrado que las distribuciones estables pueden ser generadas por medio de estos movimientos. Así, estas ideas corresponden al mismo género de series temporales.

1.5.3. Análisis R/S (rango estandarizado o reescalado)

El análisis R/S es una de las más formidables y robustas maneras de analizar datos que, se sospecha, provienen de realizaciones no gaussianas. El análisis puede usarse para cualquier conjunto de datos que varíe en el tiempo (González y Guerrero, 2001). Los principios que soportan este análisis son:

- Los datos son afectados por tendencias previas de corto y/o largo plazo. Luego, cada dato puede no ser independiente de trayectorias previas.
- En el tiempo, los efectos de esas tendencias pueden producir pequeñas o grandes fluctuaciones que originan un movimiento browniano.

El propósito de esta, y de las siguientes secciones, es definir un análisis que pueda extraer de buena forma la información acerca de la “memoria” de la serie. Los elementos básicos necesarios para realizar el análisis son: el índice de escala temporal, el rango y el rango estandarizado.

1.5.3.1. Índice de escala temporal, n

El análisis R/S utiliza el primer principio mediante la definición de un parámetro “ n ”, que es un cierto índice de escala temporal que divide la serie en periodos de longitud n . Para cada n los datos están fragmentados en grupos adyacentes de tamaño n , el análisis está enfocado sobre cada uno de estos grupos. Luego, por la organización de dichos grupos, el índice n mide las propiedades de los datos que ocurren sobre una escala temporal característica de longitud n . Por lo tanto, el índice puede ser utilizado para mostrar la memoria del sistema sobre periodos de tiempo de longitud n (en ocasiones se utiliza t como índice de escala).

1.5.3.2. Rango

En general, el rango está definido como la máxima distancia entre dos puntos en un conjunto. Para un sistema que cambia en el tiempo, es la distancia entre los dos puntos más distantes cubiertos en un periodo. Así, este mide cuánta distancia ha cubierto una variable en un lapso dado. La medida característica de un movimiento browniano consiste en el incremento de su rango en proporción a la raíz cuadrada del tiempo.

El análisis R/S utiliza el segundo principio para comparar el rango de una variable con el rango de un movimiento browniano preestablecido, con el fin de evaluar su comportamiento.

1.5.3.3. Rango estandarizado

Es necesario hacer un refinamiento final al rango mediante la división de este por la desviación estándar de las observaciones en el tiempo. Se obtiene así el rango estandarizado “R/S”, también llamado rango normalizado. Sin esta normalización es imposible comparar diferentes orígenes de series temporales.

Estas tres definiciones constituyen el fundamento intuitivo del análisis R/S. En este análisis se grafica el logaritmo del R/S como una función del índice de escala temporal (n). Esta gráfica muestra una “potencia-ley” que relaciona el rango normalizado con la variación de la escala temporal. Esta técnica se utiliza para extraer dos importantes piezas de información:

- El exponente Hurts que describe las características fractales de la serie temporal y caracteriza la persistencia de dicha serie. Es un importante elemento relativo al comportamiento de la serie en el corto plazo.
- El periodo promedio de ciclos no periódicos puede ser reconocido por una variación parecida del análisis R/S, llamada V-análisis, el cual identifica los rasgos críticos del comportamiento de la serie a largo plazo.

1.5.4. El exponente Hurst

Albert Einstein realizó un estudio extensivo sobre la noción de ruido browniano que recayó en la modelación de paseos aleatorios de partículas dentro de un estudio estadístico. El físico descubrió que la distancia cubierta por una partícula aleatoria que sufrió colisiones está directamente relacionada con la raíz cuadrada del tiempo. Si se denota R como la distancia cubierta, k como una constante de proporcionalidad y T como el índice utilizado para indicar el tiempo, se obtiene la expresión (Quintero y Ruiz, 2011):

$$R = k * \sqrt{T}$$

Ahora bien, utilizando el análisis del rango estandarizado, Hurts sugiere una normalización del concepto de ruido browniano que puede ser aplicado a series temporales. Esta ecuación general es:

$$\frac{R}{S} = k * n^H$$

Donde: R/S es el rango estandarizado (Rango/Desviación estándar), n es el índice utilizado para denotar el número de observaciones por intervalo de tiempo, k es alguna constante para la serie temporal y H se define como el exponente Hurts. Con esta ley general, se presentan las bases para generalizar la noción de ruido browniano al concepto de ruido browniano fractal (fraccional), el cual existe siempre y cuando el exponente Hurts esté bien definido.

El valor R/S es una fracción adimensional obtenida al dividir el rango por la desviación estándar de las observaciones. Esta nueva variable (escala) equivale al valor del índice temporal ajustado por una potencia cuyo valor es H. Este es el punto básico para el análisis de Hurts: al reescalar, pueden compararse diversos valores observados en el tiempo, incluyendo periodos de tiempo que separados por muchos años. Adicionalmente, este tipo de análisis es utilizado para describir series temporales que no poseen una escala característica.

La ecuación general de Hurts posee una característica de la geometría fractal: su escala está en concordancia con una ley de potencia. En el pulmón, por ejemplo, el tamaño de cada ramificación decrece en una escala acorde a una ley de potencia inversa. Sin embargo, la función R/S crece como una potencia de H. El valor de H está en el intervalo cerrado [0,1]. Ahora bien, si H=0,5 el sistema sigue una trayectoria aleatoria, recuperando el escenario original de un movimiento browniano. En caso contrario, las observaciones no son independientes y cada una lleva consigo una “memoria” de eventos que le han precedido.

Se pueden distinguir entonces tres casos:

- H=0,5: serie independiente (ruido browniano o movimiento Browniano). Los valores observados en la serie son independientes de los valores del pasado. La serie es un paseo aleatorio.
- $0 \leq H < 0,5$: serie antipersistente (ruido rosado). El sistema está cubriendo menos distancia que un paseo aleatorio. Así, tiene la tendencia de regresar frecuentemente sobre sí misma. Si incrementa es muy probable que decrezca en el próximo periodo. Si decrece, es muy probable que aumente. Este efecto se explica en términos del efecto espejo, la derivada de una serie temporal de ruido negro es un ruido rosado, al igual que la derivada de un ruido marrón es un ruido blanco. Luego, puesto que la volatilidad de

mercados puede entenderse como la derivada de una serie temporal ruido negro, esta es un ruido rosado.

- $0,5 < H \leq 1$: serie persistente (ruido negro). Esta serie cubre más distancia que un paseo aleatorio. Así, si una serie incrementa en un lapso es muy probable que sufra un aumento en el periodo siguiente. A este comportamiento generalmente se le conoce como el efecto José, en este se refleja la tendencia de tener “siete años” de fortuna seguidos de siete años de hambre. Tales series también tienen el potencial para catástrofes imprevistas, conocidas como el efecto Noé.

Por otro lado, el exponente Hurts es una estadística robusta que tiene las siguientes propiedades:

- Posee una medida útil para distribuciones fractales. No hay una escala de tiempo característica en tales distribuciones.
- Las siguientes afirmaciones son equivalentes para series temporales:
 - » El exponente está bien definido para la serie temporal.
 - » La serie temporal presenta un movimiento browniano fraccional.
 - » La distribución de probabilidad es estable.
 - » La pendiente de la gráfica de $\log(R/S)$ en función de $\log(n)$ es constante.
- $1/H$ es la dimensión fractal del espacio de probabilidades. Note que un paseo aleatorio tiene una dimensión fractal de $1/0,5=2$.
- $2-H$ es la dimensión fractal de la serie temporal.
- 2^*H+1 es la tasa a la cual decrece la serie de Fourier. Esto significa que los coeficientes de Fourier decrecen proporcionalmente a $1/f^{(2^*H+1)}$.
- El exponente puede estimarse a partir del conocimiento de la pendiente de la gráfica de $\log(R/S)$ contra $\log(n)$, de la siguiente manera:

$$\log\left(\frac{R}{S}\right) = \log(k * n^H) = \log(k) + H * \log(n)$$

- Si no hay largos periodos de memoria, las perturbaciones de los datos no afectan la estimación de H. Sin embargo, al destruir la estructura de aleatoriedad de los datos, la estimación de H podría ser mucho menor. Por lo tanto, el exponente es una buena herramienta de la “memoria” del sistema.
- Se ha demostrado que la varianza de H es $1/(n*t)$, donde n es el índice de la escala temporal y t es la cantidad total de tiempo. Luego, altos valores de n reducen la incertidumbre en la estimación de H. Así, para estadísticas fractales, no se necesitan más observaciones, lo que se precisa es una larga serie temporal.

1.5.5. Ciclos no periódicos y V-análisis

1.5.5.1. Ciclos no periódicos

Un ciclo no periódico es una generalización natural del ciclo periódico. Una serie senoidal tiene un periodo fijo de 2π . Para series temporales aleatorias frecuentemente hay tendencia hacia el comportamiento periódico; no obstante, es posible que el ciclo sea determinado en forma aleatoria en vez de estacionaria.

Así, en lugar de tener un periodo estacionario fijo, por ejemplo: 2π , este varía para cada fase de acuerdo con alguna distribución aleatoria, la cual, en algunos casos, tiene una forma gaussiana; de modo que tiene bien definida la media y la varianza. Si no, entonces se dice que la serie temporal contiene ciclos no periódicos, generalmente, también se dice ello si tiene: una media periódica y una desviación estándar esperada en ese periodo para cada media.

Este requerimiento no es trivial, un movimiento browniano fraccional no cumple estos requerimientos, aun cuando tiende a oscilar entre altos y bajos valores. No tiene una media periódica, por lo tanto no contiene ciclos no periódicos. Por esta razón, Mandelbrot (1993) habla de “ciclos sin media” al referirse a distribuciones fractales; sin embargo, existen algunos ciclos no periódicos que no son caracterizados como movimientos brownianos fraccionarios (o fractales).

Usando el análisis R/S puede observarse que, en el corto plazo, la serie tiene bien definido el exponente Hurts, por ello parece ser un movimiento browniano fraccional. Luego, en el corto plazo, probablemente no es posible definir una serie cíclica. Sin embargo, a largo plazo, la serie temporal puede tener un comportamiento diferente, la diferencia puede ser observada definiendo la estadística V.

1.5.5.2. La estadística V

La estadística V se define así:

$$V = \frac{R/S}{\sqrt{n}}$$

Es muy similar a la estadística R/S, excepto que:

- El valor R/S es utilizado en el eje y , en lugar de su logaritmo.
- La estadística está dividida por la raíz cuadrada de n , así que el movimiento browniano tendría una pendiente bastante baja.

El eje x , al igual que en el análisis R/S, está definido por el logaritmo del índice de escala temporal. Esta variable se escoge de forma tal que permita describir

comportamientos de la serie ocurridos en una escala de tiempo característica de tamaño n . Un período es un buen ejemplo de tal característica. Así, se espera intuitivamente que el análisis R/S sea apropiado para describir ciclos relevantes en una serie temporal.

Para evidenciar esto, considere un movimiento browniano fraccional, este no contiene ciclos, pero tiene una pendiente constante en la gráfica R/S. Luego, al menos en este caso, el análisis R/S permitirá reconocer la ausencia de comportamientos cíclicos. Por lo tanto, al menos en un primer vistazo, la estadística R/S hará distinguir entre series temporales cíclicas y no cíclicas. La estadística V se escoge simplemente para amplificar posibles cambios repentinos que se presenten en la gráfica R/S, reflejando su comportamiento cíclico.

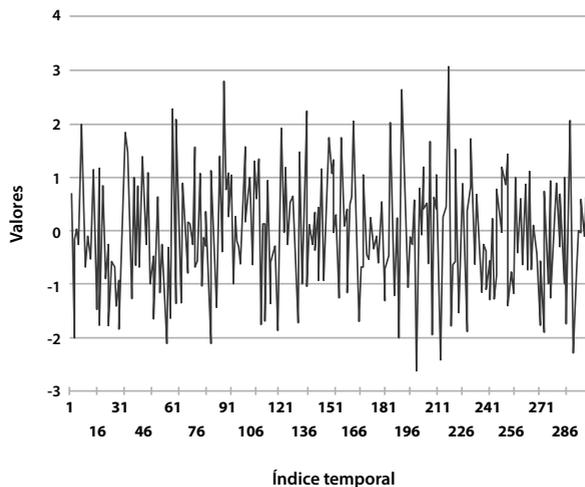
CAPÍTULO 2

SIMULACIÓN DE SERIES TEMPORALES

2.1. Proceso de ruido blanco gaussiano

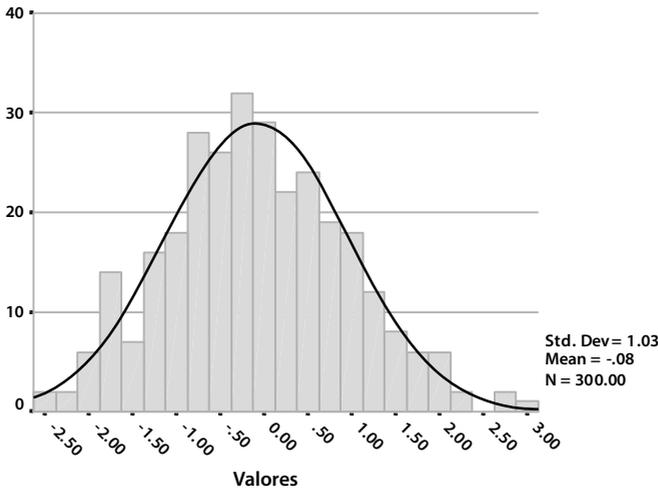
El proceso de ruido blanco es el modelo más sencillo de series temporales, consiste solamente en una serie completamente aleatoria representada, generalmente, por $\{a_t\}_T$. En la gráfica 7 se representa un ruido blanco gaussiano, con media cero y varianza 1, para un periodo de 300 puntos en el tiempo a intervalo regular.

Gráfica 7. Proceso de ruido blanco.



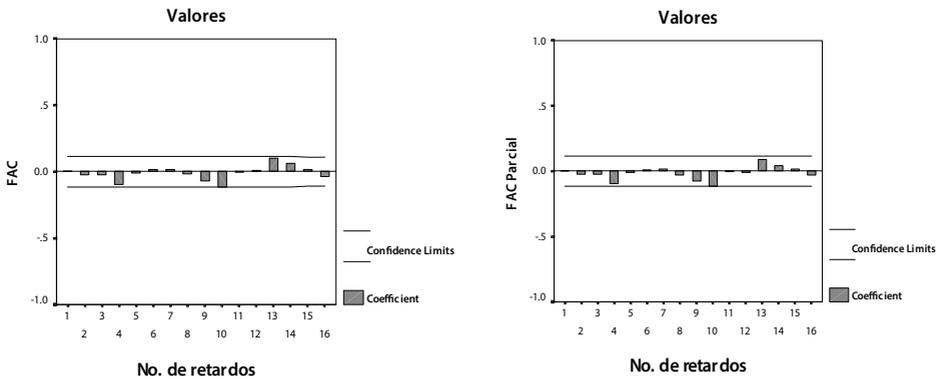
La gráfica 7 representa el proceso revisado desde el punto de vista temporal. Como era de esperarse, no se observa ningún patrón en el proceso, al tratarse de un ruido blanco. La gráfica 8 considera los valores de la serie como atemporales y permite hacer una distribución de frecuencias (de gran utilidad al momento de analizar residuales para evaluar un modelo); en ella se aprecia un buen ajuste de la curva normal a los datos simulados, así como media y varianza muestrales cercanas a los valores preestablecidos.

Gráfica 8. Distribución empírica de un proceso de ruido blanco.

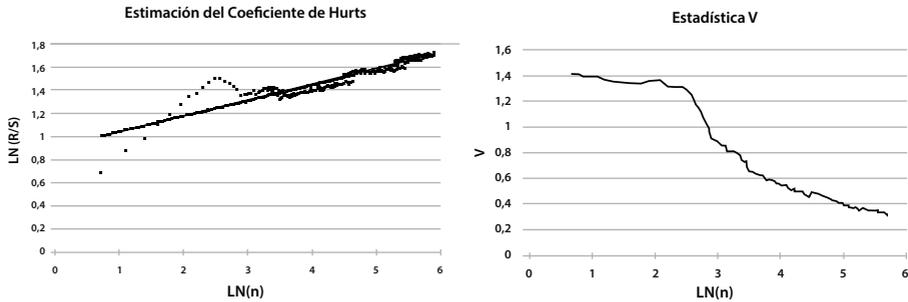


En la gráfica 9 se presentan las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial del proceso ruido blanco simulado, nótese que todos los coeficientes muestrales caen dentro de los límites críticos (intervalo de confianza) indicando así que ninguno de ellos es significativamente distinto a cero. Este comportamiento permite concluir que los valores del proceso están incorrelacionados en el tiempo, algo esperado para un proceso ruido blanco.

Gráfica 9. FAC y FACP de un proceso de ruido blanco.



Gráfica 10. Estructura fractal de un proceso ruido blanco.



En la tabla 3 se presenta la salida de la aplicación de análisis estadísticos de datos SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*) para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 10 junto a la estadística para el análisis V. La estructura fractal muestra que la serie original no contiene ciclos aleatorios.

Tabla 3. Estimación de exponente Hurts para un proceso de ruido blanco.

Model Summary				
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.915 ^a	.837	.836	5.482E-02

a. Predictors: (Constant). LN(N)

ANOVA ^b						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	4.581	1	4.581	1.524.420	.000 ^a
	Residual	.892	297	3.005E-03		
	Total	5.473	298			

a. Predictors: (Constant). LN(N)

b. Dependent Variable: LN(R/S)

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	.920	.017		55.722	.000
	LN (N)	.134	.003	.915	39.044	.000

a. Dependent Variable. LN(R/S)

Exponente Hurts: $H = 0,134$. La serie es antipersistente.

Dimensión fractal de la serie temporal: $2 - 0,134 = 1,866$.

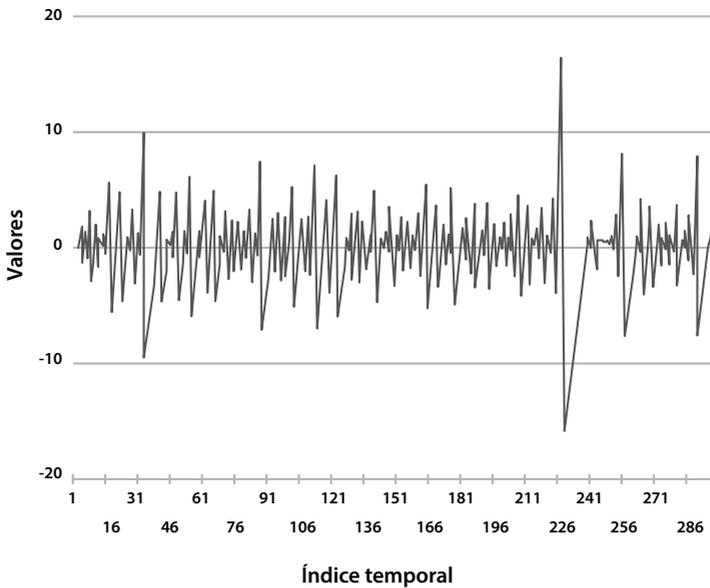
Dimensión fractal del espacio de probabilidades: $1/0,134 = 7,463$.

La serie no presenta ciclos aleatorios.

2.2. Proceso caótico

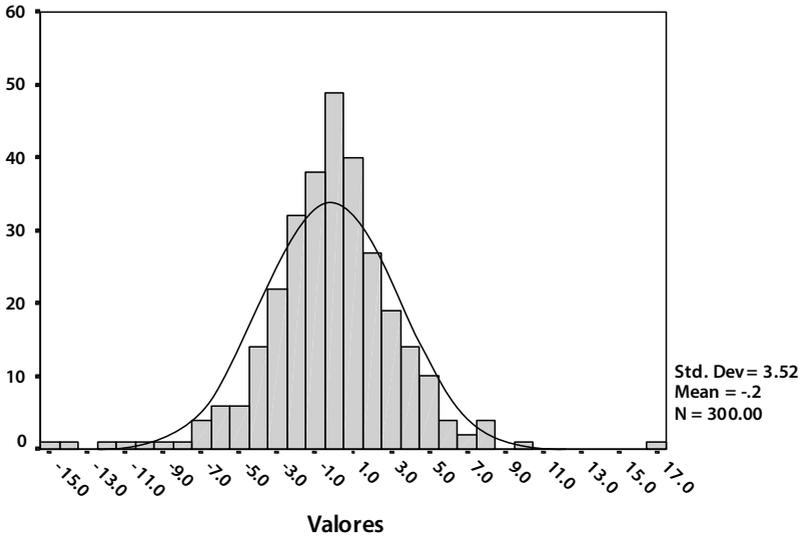
El proceso caótico se caracteriza por la no-linealidad, es altamente sensible ante pequeños cambios en las condiciones iniciales y su comportamiento es impredecible, aun cuando es de tipo determinista. En la gráfica 11 se representa un proceso caótico simulado, para un periodo de 300 puntos en el tiempo a intervalo regular.

Gráfica 11. Proceso caótico.

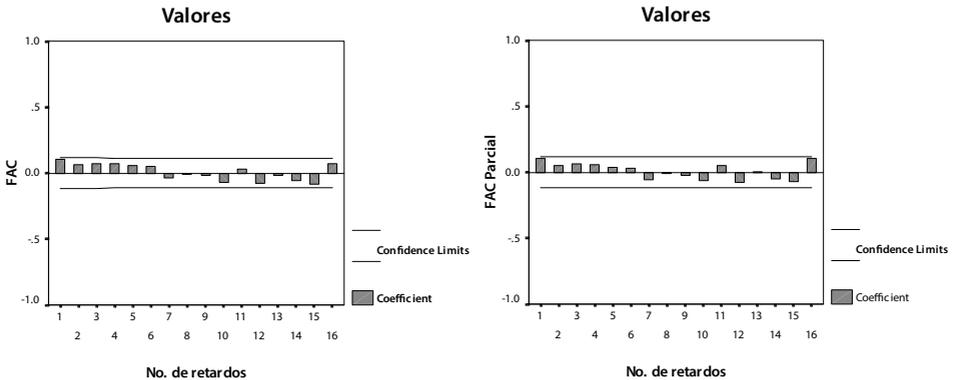


La simulación del proceso caótico parte de la determinación aleatoria de una semilla X_0 , entre cero y uno, luego se calcula la serie de iteraciones $X_{n+1} = 4 * X_n * (1 - X_n)$, finalmente la serie caótica se obtiene mediante la transformación $\ln[X_n / (1 - X_n)]$. El resultado se aproxima a una distribución normal, pero es caótico. Nótese que la distribución de probabilidad de este proceso tiene mayor curtosis que la normal (gráfica 12).

Gráfica 12. Distribución empírica de un proceso caótico.



Gráfica 13. FAC y FACP de un proceso caótico.



En la gráfica 13 se presentan las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial del proceso caótico simulado, nótese que todos los coeficientes muestrales caen dentro de los límites críticos (intervalo de confianza) indicando así que ninguno de ellos es significativamente distinto de cero. Este comportamiento permite concluir que los valores del proceso están incorrelacionados en el tiempo, lo cual es de esperarse para un proceso caótico.

Gráfica 14. Estructura fractal de un proceso caótico.

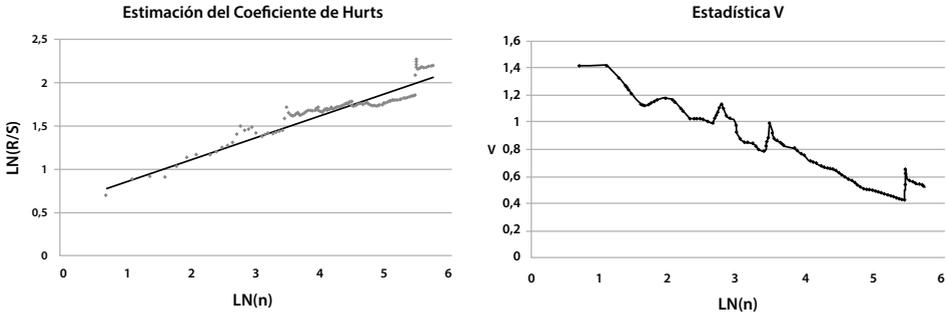


Tabla 4. Estimación de exponente Hurts para un proceso caótico.

Model Summary				
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.903 ^a	.816	.816	5.482E-02

a. Predictors: (Constant). LN(N)

ANOVA ^b						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	17.031	1	17.031	1319.595	.000 ^a
	Residual	3.833	297	1.291E-02		
	Total	20.864	298			

a. Predictors: (Constant). LN(N)

b. Dependent Variable: LN(R/S)

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	.603	.034		17.641	.000
	LN (N)	.258	.007	.903	36.326	.000

a. Dependent Variable. LN(R/S)

En la tabla 4 se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 14. De conformidad con la estructura fractal de la serie,

presentada en la misma gráfica, es válido inferir que la serie no contiene ciclos aleatorios.

Exponente Hurts: $H = 0,258$, la serie es antipersistente.

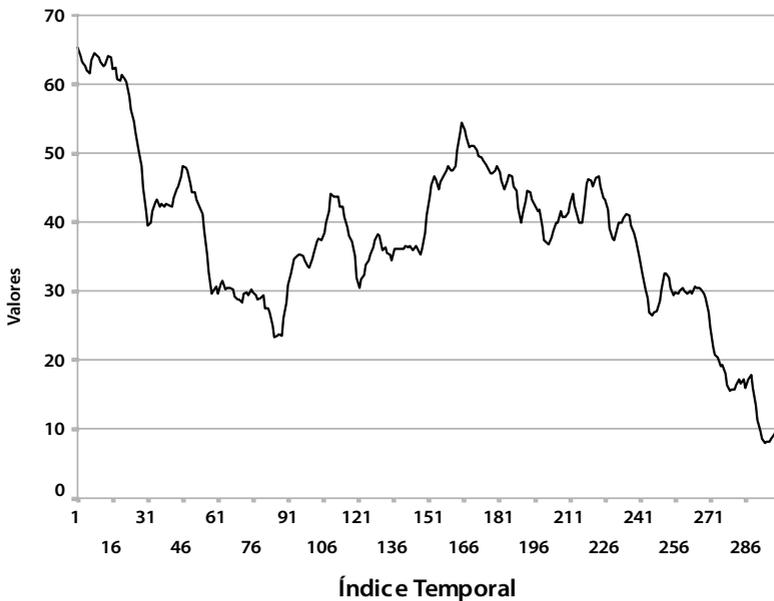
Dimensión fractal de la serie temporal: $2 - 0,258 = 1,742$.

Dimensión fractal del espacio de probabilidades: $1/0,258 = 3,876$.

La serie no presenta ciclos aleatorios.

2.3. Proceso AR(1)

Gráfica 15. Proceso simulado AR(1).

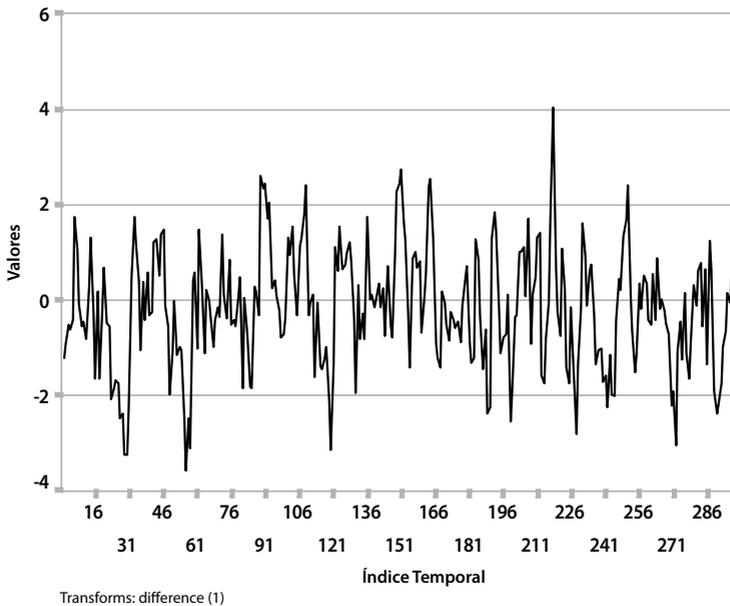


El proceso simulado, según se observa en la gráfica 15, se genera de forma tal que siga el comportamiento de un proceso autorregresivo de orden 1, AR(1), cuya función de medias es no constante. Por tanto, con el fin de obtener un proceso estacionario, antes de calcular la FAC y la FACP, se debe proceder a estabilizar el nivel antes de iniciar la identificación del modelo. Se construye entonces una nueva serie, la serie temporal en la primera diferencia, la cual se espera que sea estacionaria y definida de la siguiente manera:

$$W_t = Z_t - Z_{t-1}$$

Los valores de la serie diferenciada se muestran en la gráfica 16 y representan un proceso estacionario, ya que su media es constante e igual a cero. Un análisis visual nos permite afirmar que la varianza es constante, los valores de esta nueva serie oscilan dentro de una franja comprendida entre -4 y 4.

Gráfica 16. Proceso simulado AR(1), primera diferencia.



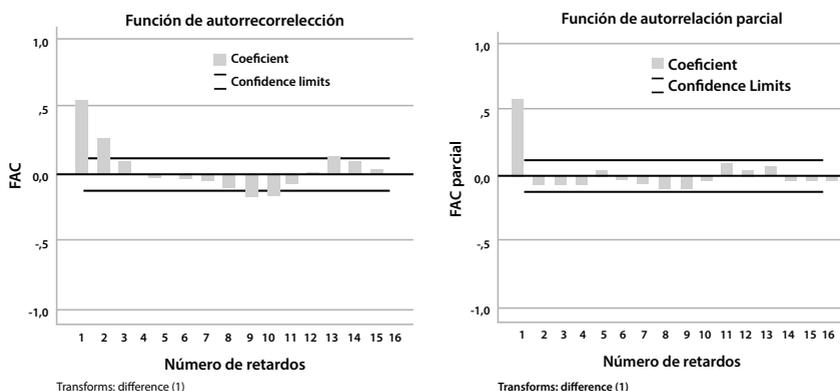
La gráfica 17 presenta las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial para el proceso AR(1) representado en la gráfica 16. Nótese que la FAC decrece, siendo significativamente distinta de cero en los tres primeros retardos, mientras que la FACP se corta después del primer retardo. Esto hace suponer que, al momento de modelar, se debe postular un modelo AR(1) para describir el proceso estocástico. Al estimar los parámetros para el proceso (en este caso, solo ϕ_1 , por tratarse de un AR(1), sin constante) se encuentra el siguiente modelo (el parámetro utilizado para la simulación fue $\phi_1 = 0.6$):

$$\check{W}_t = 0.57936 * \check{W}_{t-1}$$

Los valores de W son estimados, por ello el símbolo encima de la letra. El ruido blanco no aparece porque, en la estimación, su valor esperado debe ser cero. Para reconstruir la serie original, se reemplaza W_t por $Z_t - Z_{t-1}$, se despeja Z_t y se obtiene:

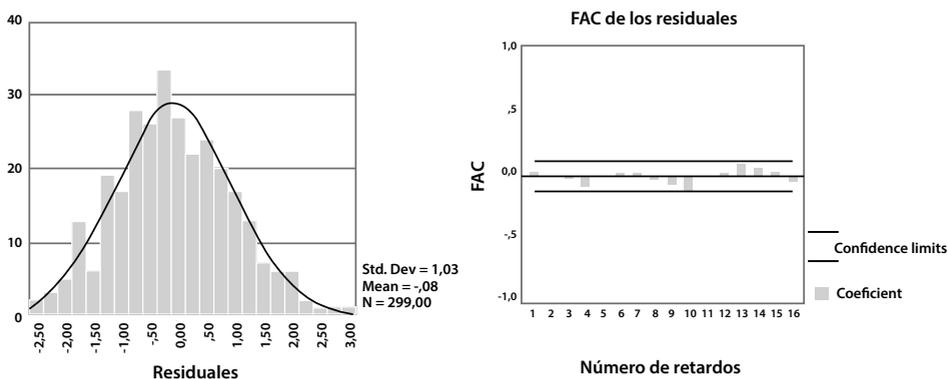
$$\check{Z}_t = 1.57936 * \check{Z}_{t-1} - 0.57836 * \check{Z}_{t-2}$$

Gráfica 17. FAC y FACP del proceso AR(1) simulado.



A continuación, se procede con la validación del modelo estimado, por tanto, deben realizarse las pruebas correspondientes con el fin de validar si cumple con las condiciones propuestas, las cuales se realizan sobre los residuales (ver sección 1.4.4.).

Gráfica 18. Análisis de residuales modelo estimado AR(1).



La gráfica 18 da indicios de que los residuales se distribuyen normalmente y están incorrelacionados. Adicionalmente, la prueba de bondad de ajuste chi-cuadrado arroja una estadística de prueba de $\chi^2=11,4$ que corresponde a un p-valor de 0,494688 (el cual es mayor que un nivel de significación de 0,05), permitiendo así tomar la decisión de que la distribución de los residuales se asemeja a una normal con media cero; esta decisión se reafirma con la estadística de Kolmogorov-Smirnov, cuyo valor es $\kappa=0,036639$, para un p-valor de 0,816992. Por otra parte, en la prueba de chi-cuadrado para incorrelación se obtuvo una estadística de prueba de $\chi^2=17,16$ (que corresponde a un p-valor de 0,578869), la tabla 5 indica que la media de los residuales es cero.

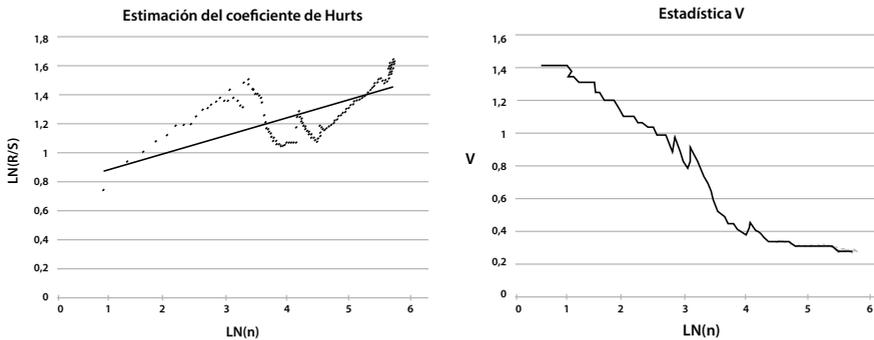
Tabla 5. Estadísticas para residuales de un proceso estimado AR(1).

One-Sample Statistics				
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
RESIDS	299	-7.99E-02	1.0257	5.932 E-02

One-Sample Test						
	Test Value = 0					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
RESIDS	-1.346	298	.179	-7.986 E-02	-.1966	3.678 E-02

Para evaluar la estabilidad de la varianza se utiliza la prueba de contraste de suma de cuadrados, la cual implica dividir la serie de residuales en tres grupos (de tamaño similar) y comparar el cuadrado medio del grupo tres con el del grupo uno; en este caso se obtiene un valor Fischer de $F=1,02377$ que permite aceptar la hipótesis de homocedasticidad de los residuales.

Gráfica 19. Estructura fractal de un proceso AR(1) simulado.



En la tabla 6, se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 19, allí también se presenta la información correspondiente al análisis V, gráfica en decreciente.

Tabla 6. Estimación del coeficiente Hurts para un proceso AR(1) simulado.

Model Summary				
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.682 ^a	.465	.463	.1227

a. Predictors: (Constant). LN(N)

ANOVA ^b						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	3.883	1	3.883	258.045	.000 ^a
	Residual	4.469	297	1.505 E-02		
	Total	8.351	298			

a. Predictors: (Constant). LN(N)

b. Dependent Variable: LN(R/S)

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	.735	.037		19.910	.000
	LN (N)	.123	.008	.682	16.064	.000

a. Dependent Variable. LN(R/S)

Exponente Hurts: $H = 0,123$. La serie es antipersistente.

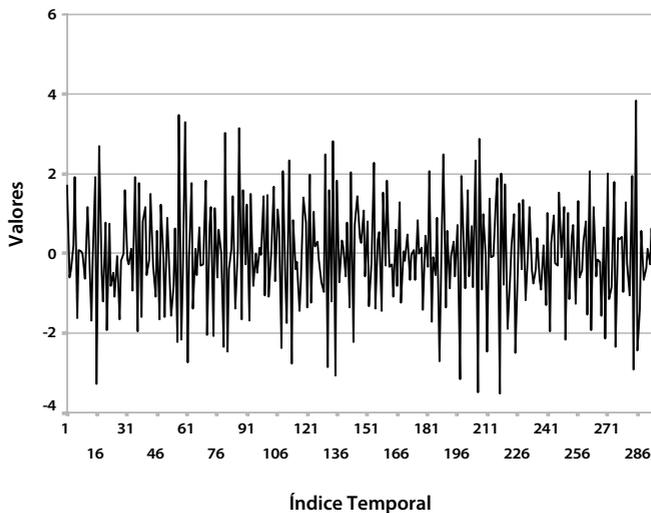
Dimensión fractal de la serie temporal: $2 - 0,123 = 1,877$.

Dimensión fractal del espacio de probabilidades: $1/0,123 = 8130$.

La gráfica 19 presenta la estadística V con un comportamiento monótono decreciente (aproximado), lo cual sugiere que la serie no contiene ciclos aleatorios no periódicos.

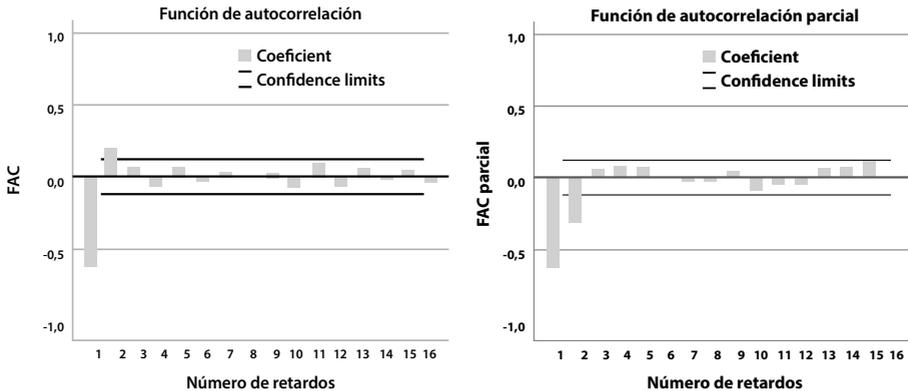
2.4. Proceso MA(2)

Gráfica 20. Proceso simulado MA(2).



El proceso simulado observado en la gráfica 20 se genera, de forma tal, que siga el comportamiento de un proceso de promedio móvil de grado 2, MA(2). La serie tiene función de medias constante e igual a cero, además, se aprecia que la varianza es constante; luego, puede inferirse que el proceso es estacionario. Por tales motivos se procede directamente a calcular sus funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, a fin de identificar el modelo.

Gráfica 21. FAC y FACP del proceso MA(2) simulado.

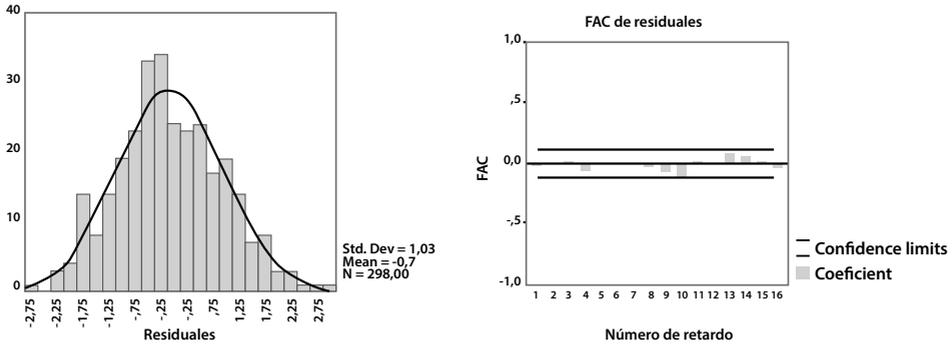


En la gráfica 21 se presentan las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial para el proceso representado en la gráfica 20. Nótese que la FAC se corta después del segundo retardo (a partir del tercer retardo es significativamente igual a cero, por ello queda dentro de la franja). La FACP, se corta después del segundo retardo, pero presenta un comportamiento decreciente. Esto hace suponer que se puede postular un modelo MA(2) para describir ese proceso estocástico, al estimar los parámetros del modelo, en este caso, θ_1 y θ_2 por tratarse de un MA(2), se encuentra el siguiente modelo:

$$\check{Z}_t = \check{a}_t - 0.77787 * \check{a}_{t-1} + 0.35292 * \check{a}_{t-2}$$

Con el fin de validarlo, deben hacerse pruebas sobre los residuales para establecer si cumplen con las condiciones propuestas en la sección 1.4.4.

Gráfica 22. Análisis de residuales modelo estimado MA(2).



La gráfica 22 da indicios de que los residuales se distribuyen normalmente y que están incorrelacionados, adicionalmente, la prueba de bondad de ajuste a una curva normal (de los residuales). Chi-cuadrado arroja una estadística de prueba $\chi^2=12,77$ que corresponde a un p-valor de 0,308047 (el cual es mayor que un nivel de significación de 0,05), esto permite decidir que la distribución de los residuales se asemeje a una normal con media cero; lo anterior se reafirma con la estadística de Kolmogorov–Smirnov, cuyo valor es $\kappa=0,0458943$, para un p-valor de 0,556789.

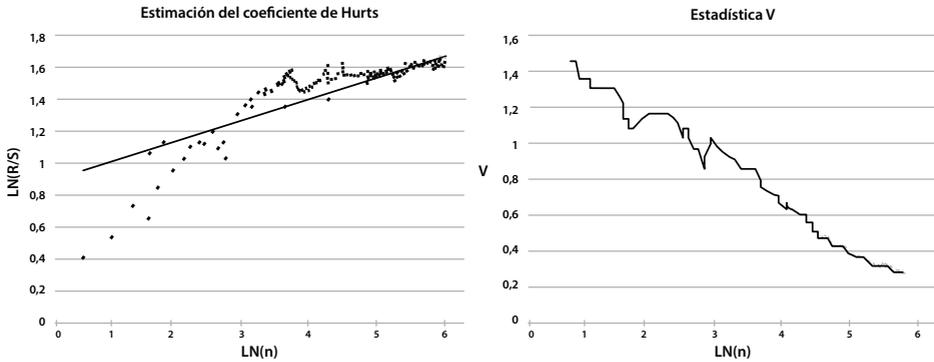
Por otra parte, los residuales están incorrelacionados (la prueba de chi-cuadrado para incorrelación arrojó una estadística de prueba de $\chi^2=12,56$ que corresponde a un p-valor de 0,81687); los resultados de la tabla 7 indican que la media de los residuales es cero. Para evaluar la estabilidad de la varianza se utiliza la prueba de contraste de suma de cuadrados que tiene un valor Fischer de $F=0,93918$, el cual permite aceptar la hipótesis de homocedasticidad de los residuales.

Tabla 7. Estadísticas para residuales de un proceso estimado MA(2).

One-Sample Statistics				
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
RESIDS	298	-6.89 E-02	1.0289	5.960 E-02

One-Sample Test						
	Test Value = 0					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
RESIDS	-1.156	297	.249	-6.890 E-02	-.1862	4.840 E-02

Gráfica 23. Estructura fractal de un proceso MA(2) simulado.



En la tabla 8 se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 23, en ella también se presenta la información correspondiente al análisis V, su gráfica en decreciente.

Tabla 8. Salida de SPSS.

Model Summary				
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.829 ^a	.687	.686	6.793 E-02

a. Predictors: (Constant). LN(N)

ANOVA ^b						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2.989	1	2.989	647.708	.000 ^a
	Residual	1.361	295	4.614 E-03		
	Total	4.350	296			

a. Predictors: (Constant). LN(N)

b. Dependent Variable: LN(R/S)

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	1.054	.021		51.403	.000
	LN (N)	.108	.004	.829	25.450	.000

a. Dependent Variable: LN(R/S)

Exponente Hurts: $H = 0,108$, la serie es antipersistente.

Dimensión fractal de la serie temporal: $2 - 0,108 = 1,892$.

Dimensión fractal del espacio de probabilidades: $1/0,108 = 9,259$.

La gráfica 23 presenta un comportamiento monótono decreciente (aproximado), lo cual sugiere que la serie no contiene ciclos aleatorios no periódicos.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES

En este capítulo se presentan y se construyen modelos de series temporales para series económicas y del sector productivo, a nivel nacional y regional. Para cada una se realizarán tres tipos de ajustes: el modelo estructural, el modelo ARIMA y la estructura fractal de la serie. Se trabajará con información recolectada y consolidada de las páginas oficiales de diferentes organismos del Estado, tales como: Departamento Nacional de Estadística (DANE), Banco de la República de Colombia (BANREP), Ministerio de Minas y Energía (Minminas), entre otros.

3.1. Índice de Precios al Consumidor (IPC) - Cúcuta

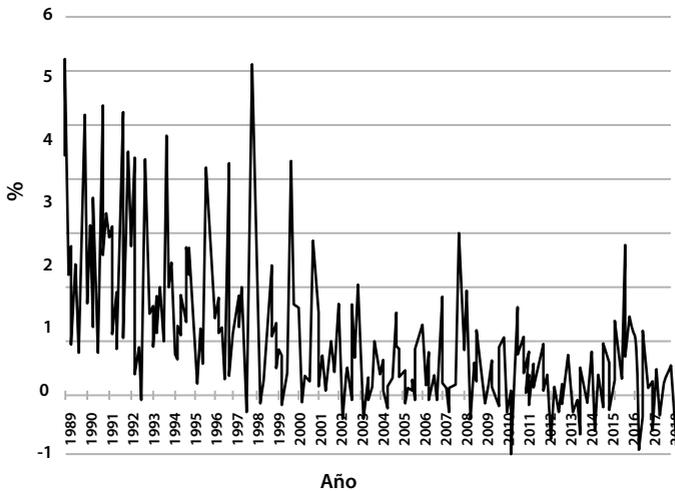
El IPC es una investigación estadística realizada por el DANE (2019b) que permite medir la variación porcentual promedio de los precios al por menor de un conjunto de bienes y servicios de consumo final que demandan los consumidores. La última metodología para su cálculo se desarrolló en 2008 con la actualización de los bienes que conforman la canasta familiar y la ampliación de cobertura de ciudades para su cálculo. Se tomó como base el mes de diciembre de ese mismo año; sin embargo, se realizaron ajustes y empalmes de las series y de bases de datos anteriores para tener valores equivalentes y comparables.

La inflación anual en Cúcuta se representa en la gráfica 24, en ella se identifica una tendencia decreciente con estabilización en el nivel después del 2002. Sin embargo, este trabajo centra la atención en la serie que constituye la variación mensual.

Gráfica 24. Inflación anual en Cúcuta.

Fuente: (DANE, 2018b; BANREP, 2018).

En la gráfica 25 se presenta la variación del IPC en Cúcuta desde enero de 1989 hasta diciembre de 2018.

Gráfica 25. Variación mensual del IPC en Cúcuta.

Fuente: (DANE).

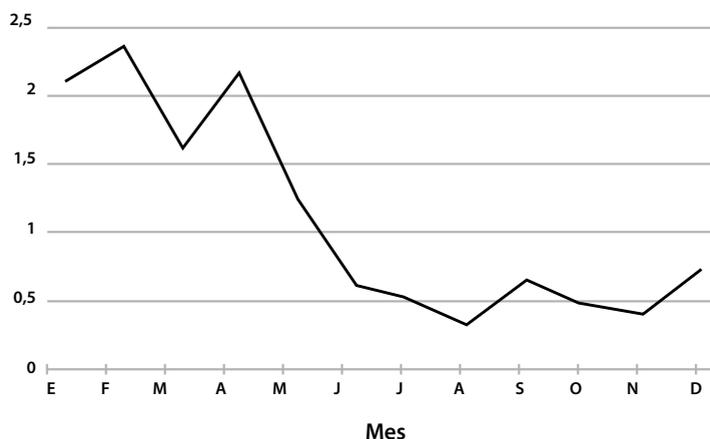
3.1.1. Ajuste de un modelo estructural

El modelo para ajustar es de carácter multiplicativo, en él se identifican los componentes: estacional y de tendencia, posteriormente, se analiza por aparte su comportamiento con el fin de describirlo y se procede a realizar las estimaciones específicas para luego agregarlos en la consolidación del pronóstico.

Cálculo del índice estacional

El índice estacional se calcula mediante el método de promedio móvil con el fin de obtener el estacional específico, que posteriormente permite hallar el índice estacional presentado en la gráfica 26. Nótese que los valores mayores del índice se encuentran en los primeros meses del año, lo cual implica a su vez, que cada año se aprecian mayores valores del IPC en estos meses que en los subsiguientes.

Gráfica 26. Índice estacional para IPC-Cúcuta.

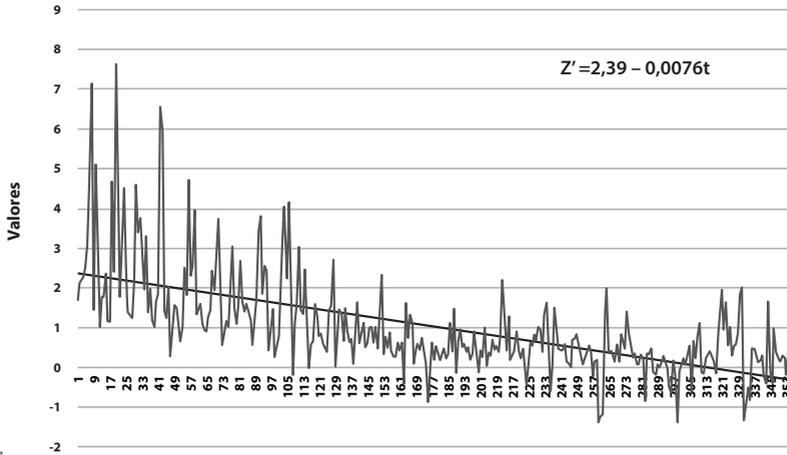


A continuación, se desestacionalizan los datos, esto significa que se calcula una nueva serie $Z' = Z/S$, donde Z representa el valor original de la serie y S el índice estacional de cada mes correspondiente. Con los datos desestacionalizados se ajusta la recta de tendencia que se muestra en la gráfica 27. Los valores residuales corresponden a la componente irregular.

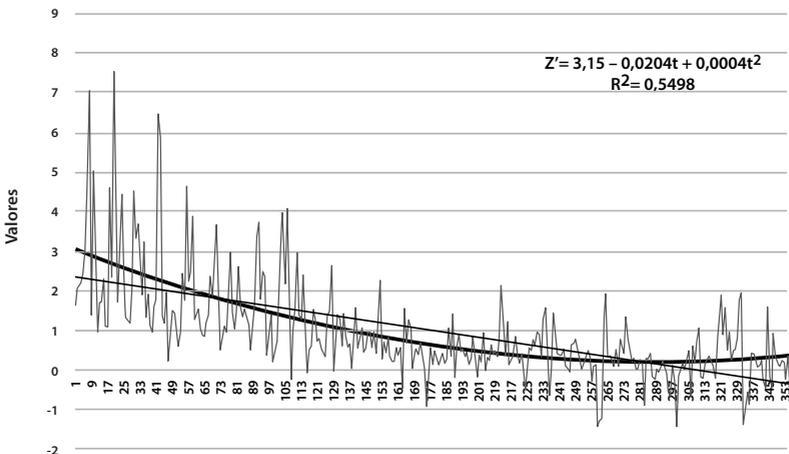
La componente de tendencia de la serie está dada por la ecuación $Z' = 2,39 - 0,0076t$. La gráfica 27 muestra comportamiento decreciente de la serie de datos desestacionalizados y, si se utiliza una recta de tendencia, se encuentra que a partir del año 2017 los valores pronosticados serían negativos en todos los casos, algo que no está conforme a la realidad de los datos, ya que estos presentan una estabilización en su nivel desde el 2004, con una ligera tendencia creciente en los últimos años. Así, para pronósticos en el corto plazo se sugiere un modelo no lineal, en este

caso, polinómico de grado dos que describe mejor la tendencia de los datos (gráfica 28). La ecuación obtenida es $Z' = 3,15 - 0,0204t + 0,00004t^2$ con un coeficiente de determinación del 55%; esto es el 55% de la variación en el IPC explicado por variaciones temporales de la misma serie.

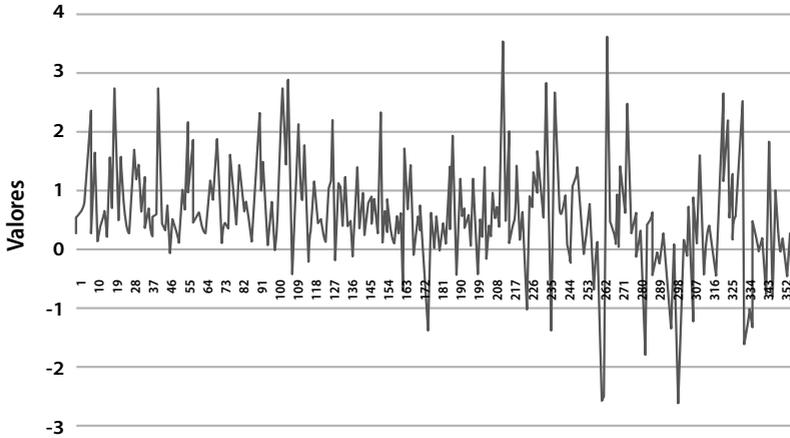
Gráfica 27. Estimación de la recta de tendencia, IPC-Cúcuta.



Gráfica 28. Estimación de la curva de tendencia, IPC-Cúcuta.



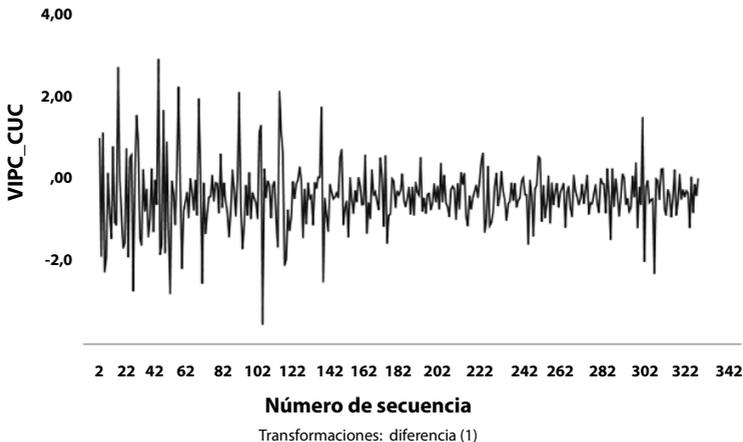
Luego de aislar los componentes estacional y de tendencia, se obtienen los valores residuales del modelo que constituyen el componente irregular o aleatorio (gráfica 29). En este caso, aunque es gaussiano, no se puede afirmar que sea un ruido blanco, puesto que su nivel es diferente de cero.

Gráfica 29. Componente aleatorio del IPC-Cúcuta.

Para realizar pronósticos de la serie con el modelo descrito, se toma el correspondiente índice estacional, se estima el valor de la tendencia y se multiplica por el índice estacional. El valor obtenido estará ajustado a un pronóstico confiable, cuyo error de estimación será dado por la no presencia del componente aleatorio.

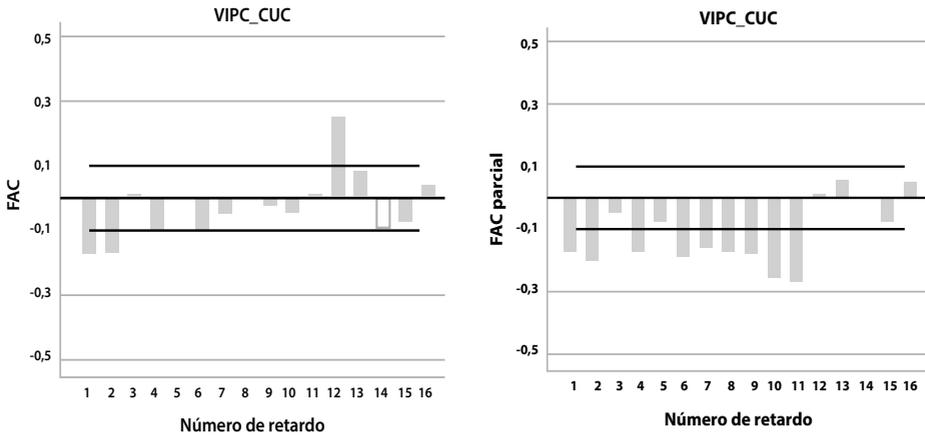
3.1.2. Ajuste de un modelo ARIMA

Para el ajuste de un modelo ARIMA a la serie temporal del IPC en Cúcuta, se parte de la serie presentada en la gráfica 25. Esta no es estacionaria porque presenta un nivel no constante, lo cual implica que se debe realizar la primera diferencia. La serie diferenciada se aprecia en la gráfica 30, corresponde a la variable $W_t = Z_t - Z_{t-1}$.

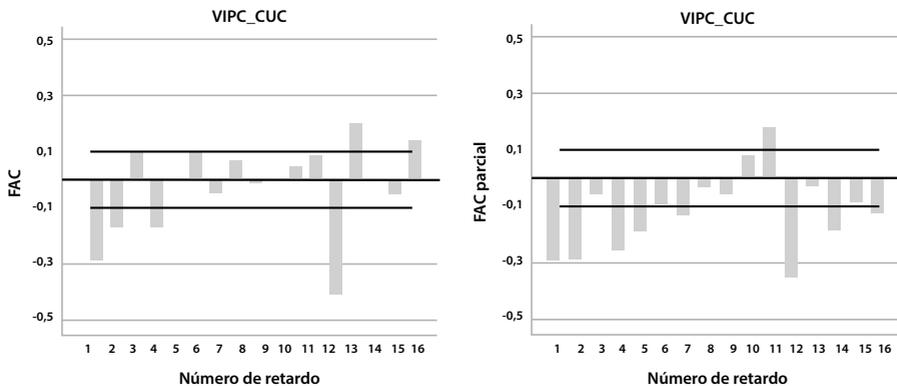
Gráfica 30. Serie IPC_CUC diferenciada.

Para la identificación del modelo se procede a calcular las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de la serie diferenciada (gráfica 31). Se aprecia un comportamiento autorregresivo; sin embargo, también se observa un comportamiento estacional detectado también en el análisis anterior; por ello se requiere calcular las funciones FAC y FACP en el retardo uno y doce (gráfica 32).

Gráfica 31. FAC y FACP de la serie IPC_CUC, dif. 1.



Gráfica 32. FAC y FACP de la serie IPC_CUC, dif 1,12.



Con base en la información suministrada por las funciones FAC y FACP, se procede a estimar un modelo $ARIMA(1,1,1)x(1,1,0)_{12}$, autorregresivo de promedio móvil en el retardo 1 y autorregresivo en el retardo 12. La serie no presenta datos atípicos, el modelo no incluye constante, pues esta es significativamente igual a cero.

$$\hat{W}_t = 0.389\hat{W}_{t-1} - 0.509\hat{W}_{t-12} + 0.931\hat{a}_{t-1} + \hat{a}_t$$

La variable aleatoria W_t está definida en función del operador de retardo B [$B^k Z_t = Z_{t-k}$], de forma tal que involucre la diferenciación de retardo uno y otra estacional de retardo 12:

$$W_t = (1-B)(1-B^{12}) Z_t = (1-B-B^{12}+B^{13})Z_t = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13}$$

En consecuencia, luego de realizar los remplazos y las simplificaciones correspondientes, se obtiene que la ecuación que rige el modelo asociado al PIB de Cúcuta es:

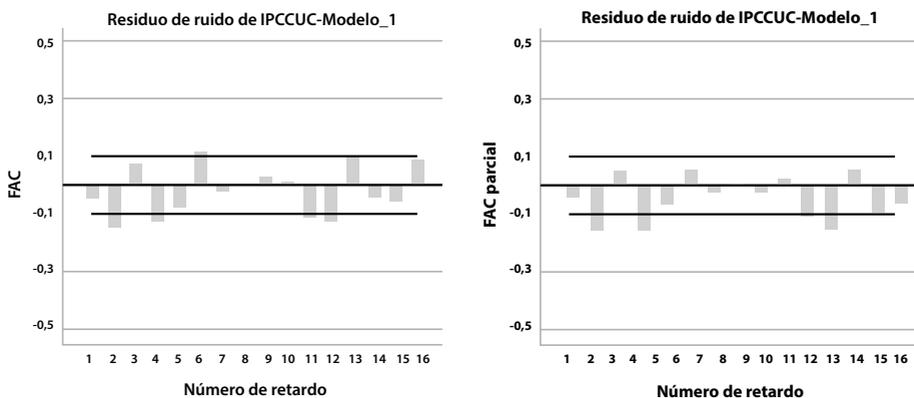
$$\hat{Z}_t = 1,389\hat{Z}_{t-1} - 0,389\hat{Z}_{t-2} + 0,491\hat{Z}_{t-12} - 0,102\hat{Z}_{t-13} + 0,389\hat{Z}_{t-14} + 0,509\hat{Z}_{t-24} - 0,509\hat{Z}_{t-25} + 0,931\hat{a}_{t-1} + \hat{a}_t$$

Los estimadores de los parámetros son significativamente diferentes a cero de conformidad con la prueba *t-student* realizada. En todos los casos se encontró un p-valor menor que 5×10^{-4} .

Análisis de residuales

La validación del modelo ajustado a los datos se realiza mediante la verificación del cumplimiento de sus supuestos, esto se lleva a cabo sobre los residuales. La gráfica 33 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, que junto con la prueba de chi-cuadrado para autocorrelación de los residuales, que arroja un valor de $\chi^2 = 13,6335$ con un p-valor de 0,692856, permiten concluir que los residuales están incorrelacionados.

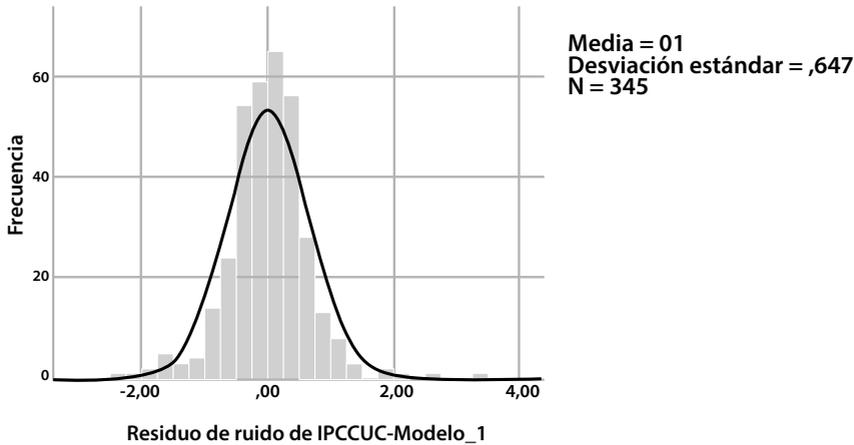
Gráfica 33. FAC y FACP de los residuales.



Los residuales siguen una distribución aleatoria normal (constituyendo una serie de ruido blanco). La prueba de normalidad de chi-cuadrado para los residuales, arroja un valor de $\chi^2 = 8,475$ con un p-valor de 0,1319. El test de Kolmogorov-

Smirnov arroja una estadística de $\kappa=0,0987$ que corresponde a un p-valor de 0,4939. En ambos casos se puede concluir que los residuales siguen una distribución normal (gráfica 34).

Gráfica 34. Distribución empírica de los residuales.



El promedio de los residuales es cero. Si se quiere evaluar la estabilidad de la varianza, se utiliza la prueba de contraste de suma de cuadrados, para ello se obtiene un valor Fischer, de $F=0,918$, que permite aceptar la hipótesis de homocedasticidad de los residuales; los cuales, en consecuencia, tienen un comportamiento de una serie ruido blanco que indica el cumplimiento de supuestos en la estimación del modelo propuesto.

3.1.3. Estructura fractal

Para el análisis de la estructura fractal de la serie se calculan los coeficientes de Hertz (H) y la estadística V. En la tabla 9 se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 35, mientras que en la 36 se presenta la información correspondiente al análisis V, según ella, la serie no contiene ciclos aleatorios.

Gráfica 35. Estimación del coeficiente de Hurtz IPC-Cúcuta.

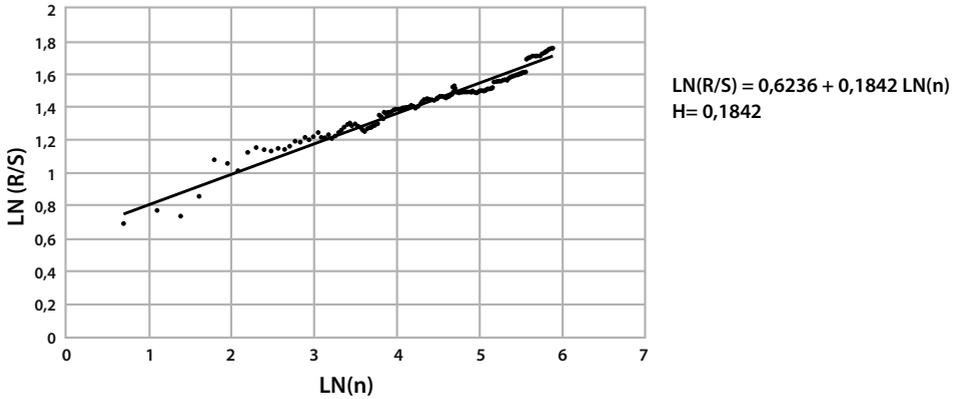


Tabla 9. Estimación del coeficiente de Hurtz IPC-Cúcuta.

Resumen del modelo				
Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
1	,977 ^a	,954	,954	,03775

a. Predictores: (constante), LN(n)

ANOVA ^a						
Modelo		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	10,575	1	10,575	7420,958	,000 ^b
	Residuo	,506	355	,001		
	Total	11,080	356			

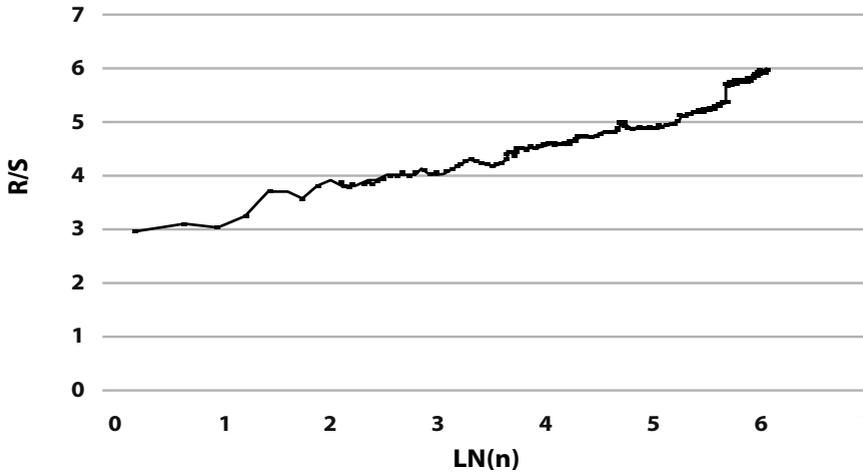
a. Variable dependiente: LN(R/S)

b. Predictores: (constante), LN(n)

Coefficients ^a						
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Desv. Error	Beta		
1	(Constante)	,624	,011		58,397	,000
	LN (n)	,184	,002	,977	86,145	,000

a. Dependent Variable. LN(R/S)

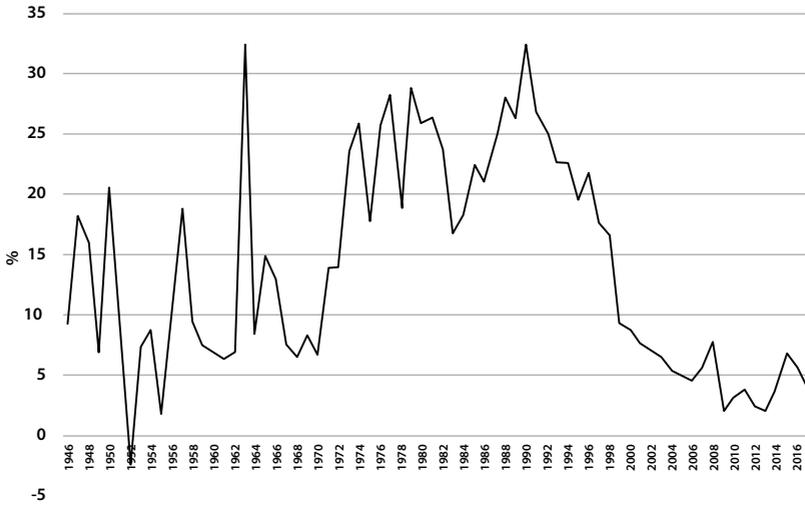
Gráfica 36. Estadística V para IPC Cúcuta.



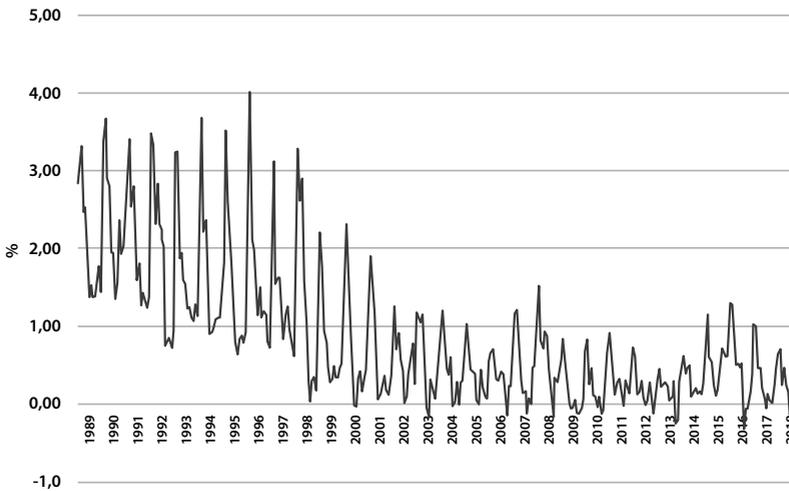
Se infiere a partir de la información sobre la estructura fractal de la serie IPC-Cúcuta que es antipersistente, ya que el exponente de Hurts es 0,1842, su dimensión fractal es $2-0,1842 = 1,8158$ y la dimensión fractal del espacio de probabilidad asociado es $1 / 0,1842 = 7245$; esto significa que la serie no presenta ciclos aleatorios.

3.2. Índice de Precios al Consumidor (IPC) – Colombia

La inflación anual en Colombia (variación porcentual en el índice de precios al consumidor) se representa en la gráfica 37. Desde 1970 a 1976, se presenta un incremento en el IPC del 7% al 25%, ubicando al país en un rango de variación anual alrededor del 20% al 30% que duró de 1976 a 1990, cuando las políticas económicas estatales llevaron a disminuir la inflación a una variación anual de un dígito, se identifica entonces una tendencia decreciente estabilizada después del año 2006. Este trabajo centra la atención en la serie que constituye la variación mensual del IPC para Colombia presentada en la gráfica 38, comprendiendo los periodos entre enero de 1988 hasta octubre de 2018 (DANE, 2019b).

Gráfica 37. Inflación anual en Colombia.

Fuente: (DANE 2018b; BANREP 2018).

Gráfica 38. Variación mensual del IPC en Colombia.

Fuente (DANE, 2018b).

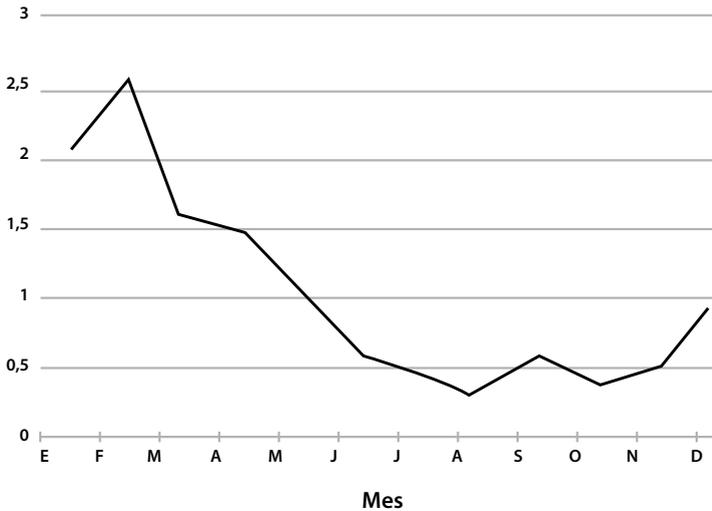
3.2.1. Ajuste de un modelo estructural

El modelo para ajustar es un modelo multiplicativo en el cual se identifican los componentes estacional y de tendencia, se analiza por aparte su comportamiento, con el fin de describirlo y proceder a realizar las estimaciones específicas para luego agregarlas en la consolidación del pronóstico.

Cálculo del índice estacional

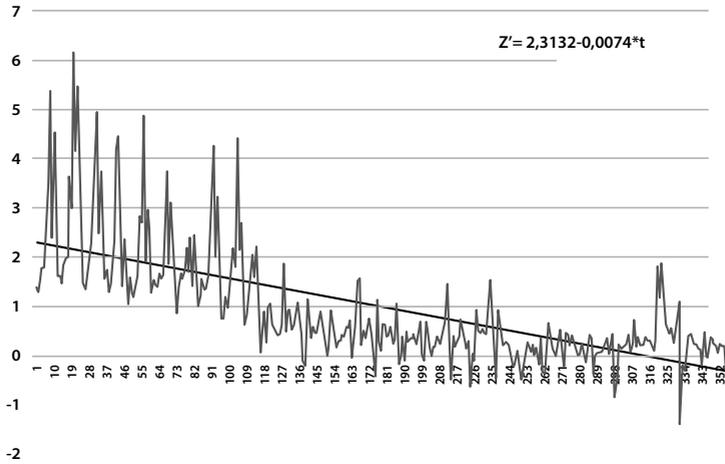
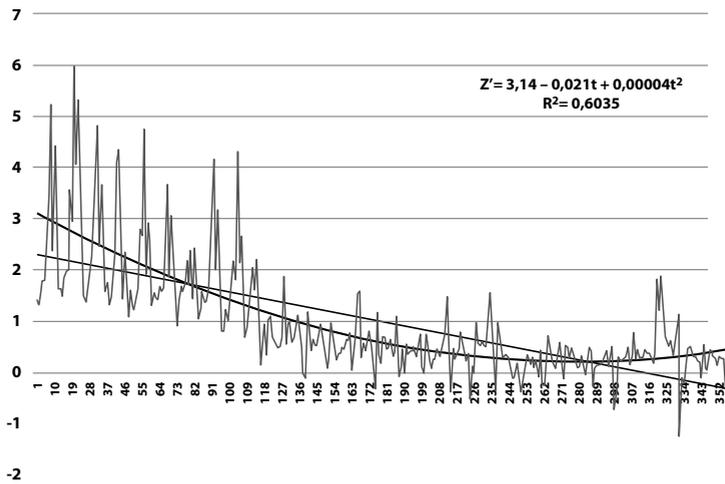
El índice estacional se calcula mediante el método de promedio móvil con el fin de obtener el estacional específico. Nótese que, de forma similar al caso de Cúcuta, los mayores valores del índice se encuentran en los primeros meses del año, lo cual implica, a su vez, que cada año se aprecia más aumento del IPC en estos meses que en los siguientes. En este caso se aprecia un crecimiento en los meses de noviembre y diciembre.

Gráfica 39. Índice estacional para IPC-Colombia.



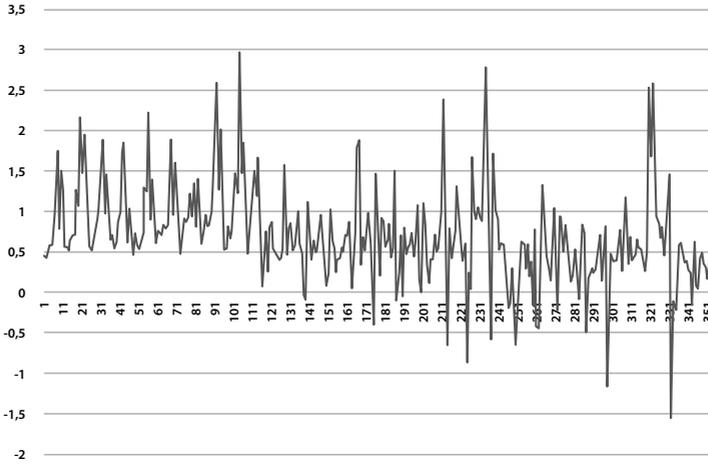
Seguidamente, se desestacionalizan los datos, para ello se calcula una nueva serie $Z' = Z/S$, donde Z representa el valor original de la serie y S el índice estacional del mes correspondiente. Una vez obtenidos dichos datos, se ajusta la recta de tendencia mostrada en la gráfica 40. Los valores residuales corresponden al componente irregular.

El componente de tendencia de la serie está dado por la ecuación $Z' = 2,31 - 0,0074t$. La gráfica 40 muestra un comportamiento decreciente de la serie de datos desestacionalizados y, si se utiliza una recta de tendencia, se encuentra que a partir del año 2017 los valores pronosticados serían negativos en todos los casos, lo cual, al igual que en el caso de Cúcuta, no está conforme a la realidad de los datos; dado que estos presentan una estabilización en su nivel a partir del año 2002 con una ligera tendencia creciente en los últimos años. Así, para pronósticos en el corto plazo se sugiere un modelo no lineal, en este caso, polinómico de grado dos, que describe mejor la tendencia de los datos (gráfica 41). La ecuación obtenida es $Z' = 3,14 - 0,021t + 0,00004t^2$, posee un coeficiente de determinación del 60%.

Gráfica 40. Estimación de la recta de tendencia, IPC-Colombia.**Gráfica 41. Estimación de la curva de tendencia, IPC-Colombia.**

Luego de aislar los componentes estacional y de tendencia se obtienen los valores residuales del modelo que constituyen el componente irregular o aleatorio (gráfica 42); en este caso, aunque es gaussiano, no se puede afirmar que sea un ruido blanco, puesto que su nivel es diferente de cero.

Gráfica 42. Componente aleatorio del IPC-Colombia.

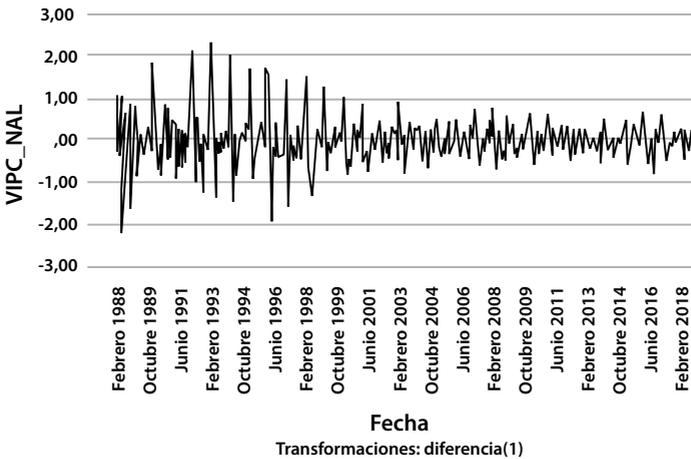


Para realizar pronósticos de la serie con el modelo descrito, se toma el correspondiente índice estacional, se estima el valor de la tendencia y se multiplica por el mismo índice. El valor obtenido estará ajustado a un pronóstico confiable, cuyo error de estimación será dado por la no presencia del componente aleatorio.

3.2.2. Ajuste de un modelo ARIMA

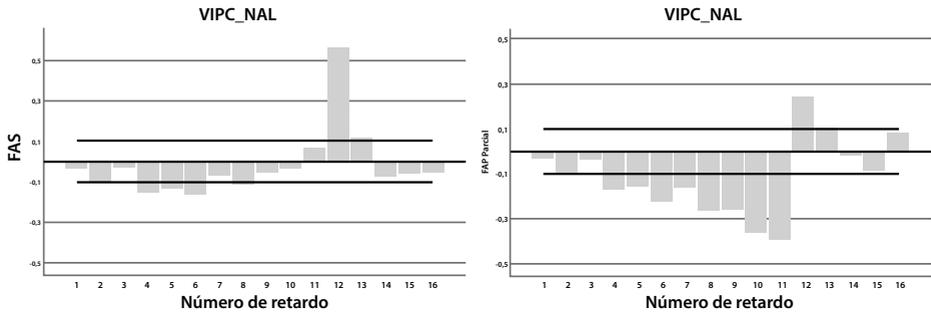
Para el ajuste de un modelo ARIMA a la serie temporal del IPC en Colombia, se inicia de de la serie presentada en la tabla 11 y en la gráfica 38, esta no es estacionaria por cuanto presenta un nivel no constante, lo cual implica que se debe realizar la primera diferencia. La serie diferenciada se aprecia en la gráfica 43, corresponde a la variable $W_t=Z_t-Z_{t-1}$.

Gráfica 43. Serie IPC_NAL diferenciada.

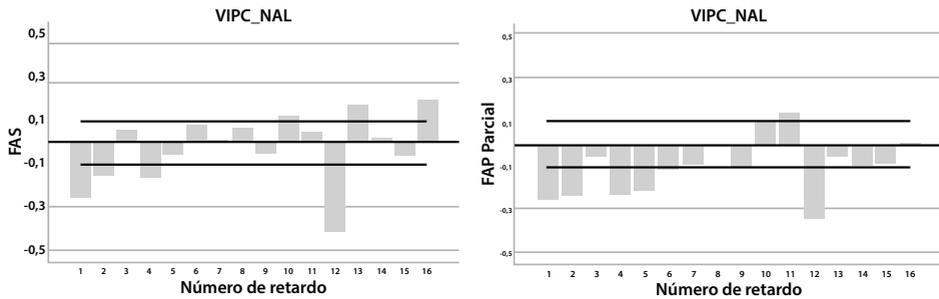


Para la identificación del modelo se procede a calcular las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de la serie diferenciada (gráfica 44). Se aprecia un comportamiento autorregresivo; sin embargo, también se observa un comportamiento estacional que ya se había detectado en el análisis anterior, por ello se requiere calcular las funciones FAC y FACP en el retardo uno y doce (gráfica 45).

Gráfica 44. FAC y FACP de la serie IPC_NAL, dif. 1.



Gráfica 45. FAC y FACP de la serie IPC_NAL, dif. 1,12.



Con base en la información suministrada por las funciones FAC y FACP se procede a estimar un modelo $ARIMA(1,1,1)x(1,1,0)_{12}$, autorregresivo de promedio móvil en el retardo 1 y autorregresivo en el retardo 12. La serie no presenta datos atípicos, el modelo no incluye constante, pues esta es significativamente igual a cero.

$$\hat{W}_t = 0.503\hat{W}_{t-1} - 0.448\hat{W}_{t-12} + 0.997\hat{a}_{t-1} + \hat{a}_t$$

La variable aleatoria W_t está definida en función del operador de retardo B [$B^k Z_t=Z_{t-k}$], de forma tal que involucre la diferenciación de retardo 1 y otra estacional de retardo 12:

$$W_t=(1-B)(1-B^{12}) Z_t=(1-B-B^{12}+B^{13})Z_t=Z_t-Z_{t-1}-Z_{t-12}+Z_{t-13}$$

En consecuencia, luego de realizar los remplazos y simplificaciones correspondientes, se obtiene que la ecuación que rige el modelo asociado al PIB de Cúcuta es:

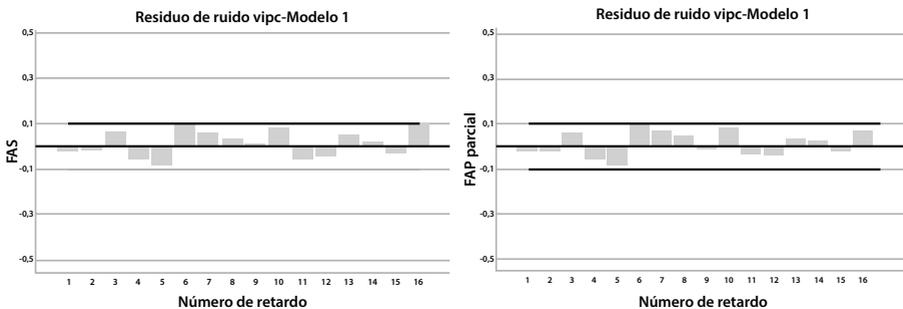
$$\hat{Z}_t=1,503\hat{Z}_{t-1}-0,503\hat{Z}_{t-2}+0,552\hat{Z}_{t-12}-1,951\hat{Z}_{t-13}+0,503\hat{Z}_{t-14}-0,448\hat{Z}_{t-24}+0,448\hat{Z}_{t-25}+0,997\hat{a}_{t-1}+\hat{a}_t$$

Los estimadores de los parámetros son significativamente diferentes a cero, de conformidad con la prueba *t-student* realizada. En todos los casos se encontró un p-valor menor que $5 \cdot 10^{-4}$.

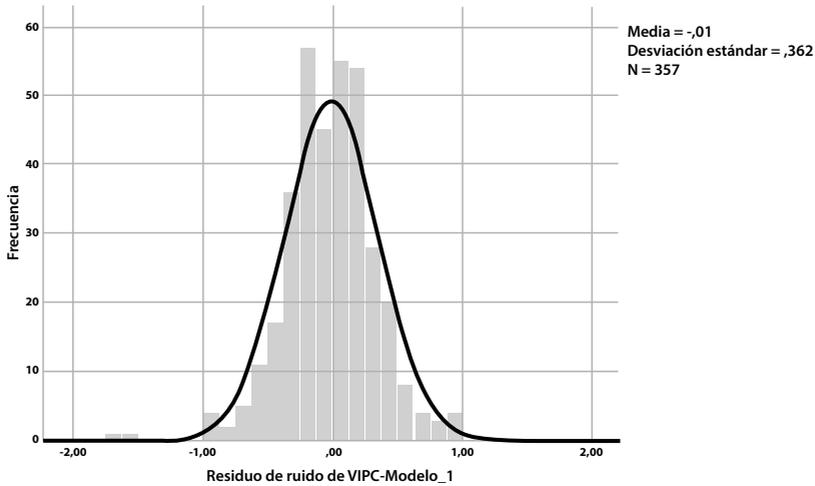
Análisis de residuales

La validación del modelo ajustado a los datos se realiza mediante la verificación del cumplimiento de sus supuestos, ejecutado sobre los residuales. La gráfica 46 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial que junto con la prueba de chi-cuadrado para autocorrelación de los residuales, la cual arroja un valor de $\chi^2=1.6237$ con un p-valor de 0.89, permiten concluir que los residuales están incorrelacionados.

Gráfica 46. FAC y FACP de los residuales.



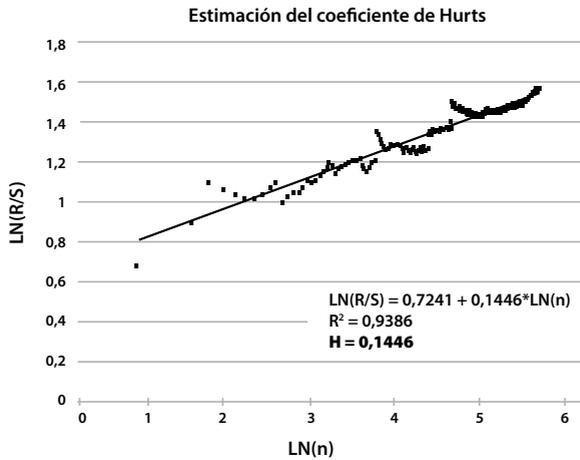
Los residuales siguen una distribución aleatoria normal (constituyendo así una serie ruido blanco). La prueba de normalidad chi-cuadrado para los residuales, arroja un valor de $\chi^2=8,475$ con un p-valor de 0,1319. El test de Kolmogorov–Smirnov da una estadística de $\kappa=0,0987$ correspondiente a un p-valor de 0,4939. En ambos casos se infiere que los residuales siguen una distribución normal (gráfica 34).

Gráfica 47. Distribución empírica de los residuales.

El promedio de los residuales es cero, para evaluar la estabilidad de la varianza se utiliza la prueba de contraste de suma de cuadrados para la cual se obtiene un valor Fischer de $F=0,925$, que permite aceptar la hipótesis de homosedasticidad de los residuales. En consecuencia, los residuales tienen un comportamiento de una serie ruido blanco, lo cual indica el cumplimiento de supuestos en la estimación del modelo propuesto.

3.2.3. Estructura fractal

Para el análisis de la estructura fractal de la serie se calculan los coeficientes de Hertz (H) y la estadística V. En la tabla 12 se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 48, mientras que en la 49 se presenta la información correspondiente al análisis V, según ella, la serie no contiene ciclos aleatorios.

Gráfica 48. Estimación del coeficiente de Hurtz IPC-Nacional.**Tabla 10. Estimación del coeficiente de Hertz. IPC-Nacional**

Resumen del modelo				
Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
1	,969 ^a	,939	,938	,03464

a. Predictores: (constante), LN(n)

ANOVA ^a						
Modelo		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	6,513	1	6,513	5428,883	,000 ^b
	Residuo	,426	355	,001		
	Total	6,939	356			

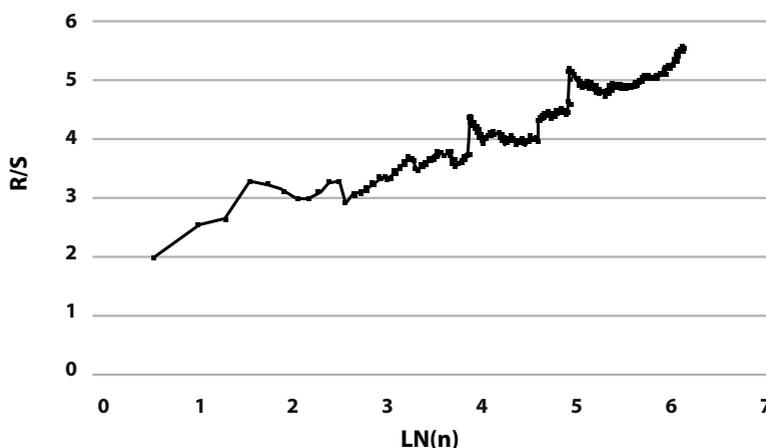
a. Variable dependiente: LN(R/S)

b. Predictores: (constante), LN(n)

Coefficients ^a						
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Desv. Error	Beta		
1	(Constante)	,724	,010		73,904	,000
	LN (n)	,145	,002	,969	73,681	,000

a. Dependent Variable. LN(R/S)

Gráfica 49. Estadística V para IPC Nacional.

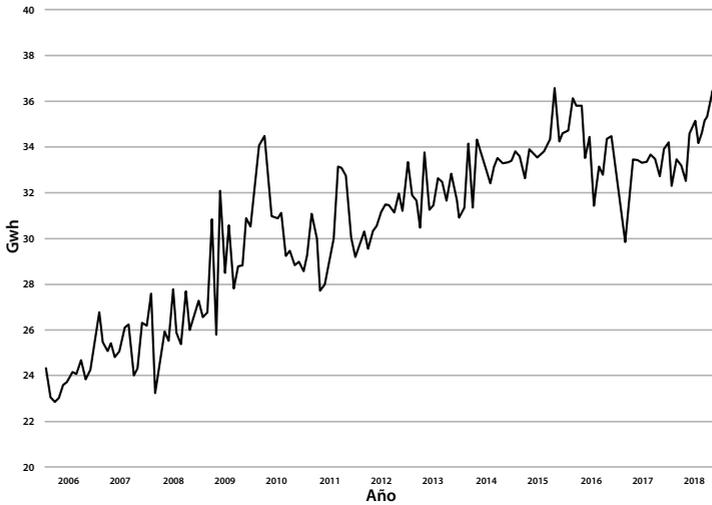


Se infiere, a partir de la información sobre la estructura fractal de la serie IPC que esta serie es antipersistente, ya que el exponente de Hurts es 0,1446, su dimensión fractal es $2 - 0,1446 = 1,8554$ y la dimensión fractal del espacio de probabilidad asociado es $1 / 0,1446 = 6916$, por lo tanto, la serie no presenta ciclos aleatorios.

3.3. Consumo residencial de energía eléctrica en Cúcuta

En el Boletín Estadístico de Minas y Energía, el Gobierno colombiano, MINMINAS y la Unidad de Planeación Minero Energética (UPME) publican bianualmente las estadísticas sobre oferta y demanda de los diferentes sectores energéticos del país. También en su página web, la UPME y el Sistema de Información Minero Energético Colombiano (SIMEC) presentan la información correspondiente al Sistema Único de Información de Servicios Públicos Domiciliarios (SUI), a través de la cual se accede al valor del consumo total y facturado residencial y no residencial de energía eléctrica, por la empresa comercializadora en cada ciudad y departamento del país (UPME, 2019a; UPME, 2019b).

En la gráfica 50 se muestra el consumo residencial mensual de energía eléctrica de la ciudad de Cúcuta, manejado por Centrales Eléctricas del Norte de Santander (CENS). Los valores corresponden al agregado de las series presentadas en la gráfica 1, donde se detallan los niveles de consumo por estrato socioeconómico. El modelo ajustado en esta apartado corresponde al consumo total, dejándose así al lector la posibilidad de estimar modelos por cada estrato.

Gráfica 50. Consumo mensual de energía eléctrica residencial en Cúcuta.

Fuente: (UPME, 2019).

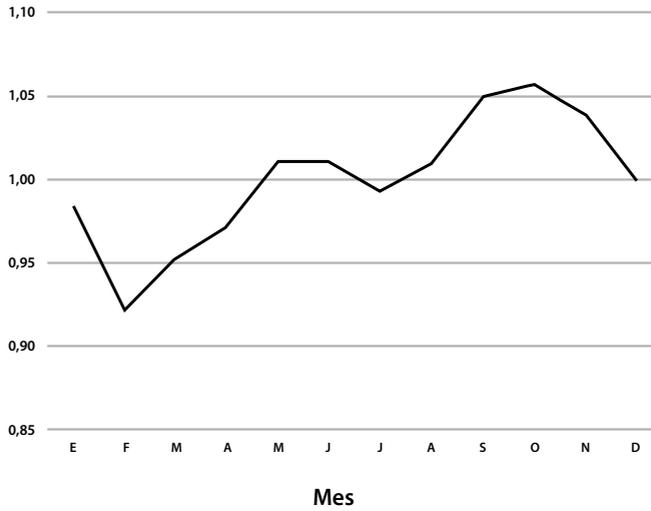
3.3.1. Ajuste de un modelo estructural

Al igual que en los casos anteriores, se utiliza un modelo multiplicativo en el que se identifican los componentes: estacional, irregular y de tendencia, a fin de analizar el comportamiento intertemporal de la serie y realizar pronósticos confiables. Se sigue el procedimiento descrito en la sección 3.1 para la obtención de los componentes referidos.

Índice estacional

El índice estacional se calcula mediante el método de promedio móvil con el fin de obtener el estacional específico que, posteriormente, permite hallar el índice estacional presentado en la gráfica 51. Los mayores valores del índice se encuentran en los meses de septiembre, octubre y noviembre, contrario al mes de febrero que cuenta con un valor muy bajo.

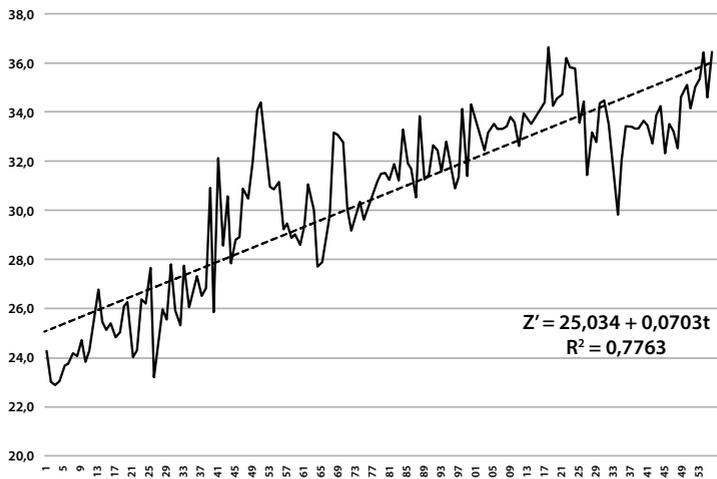
Gráfica 51. Índice estacional - Consumo de energía en Cúcuta.



Estimación de la recta de tendencia

A continuación, se desestacionalizan los datos para ajustarlos a la recta de tendencia cuya ecuación e imagen se muestran en la gráfica 52. Los valores residuales corresponden al componente irregular; por otro lado, el componente de tendencia de la serie está dado por la ecuación $Z' = 25,03 + 0,07t$. La gráfica 40 muestra un comportamiento creciente de la serie de datos desestacionalizados, con un coeficiente de determinación del 77,6%.

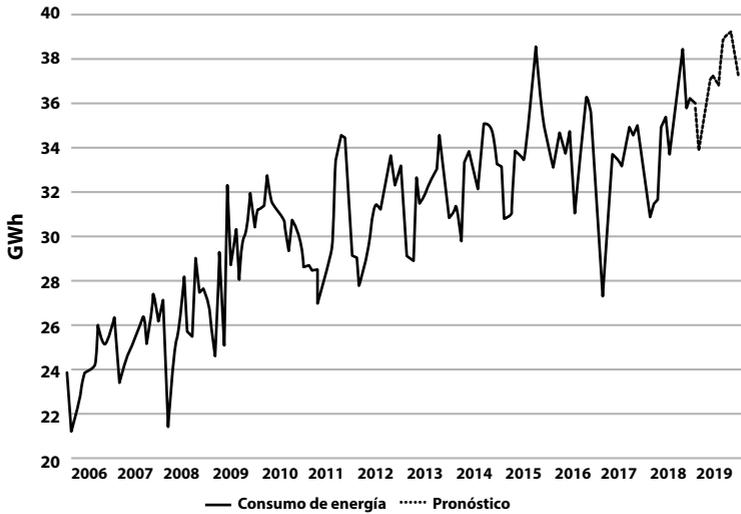
Gráfica 52. Estimación de la recta de tendencia, consumo de Energía en Cúcuta.



Para realizar pronósticos de la serie con el modelo descrito, se toma el correspondiente índice de temporalidad y se estima el valor de la tendencia para el año 2019, en seguida se multiplica por el índice estacional. El valor así obtenido estará ajustado a un pronóstico confiable, cuyo error de estimación será dado por la no presencia del componente aleatorio.

Cálculo de pronósticos

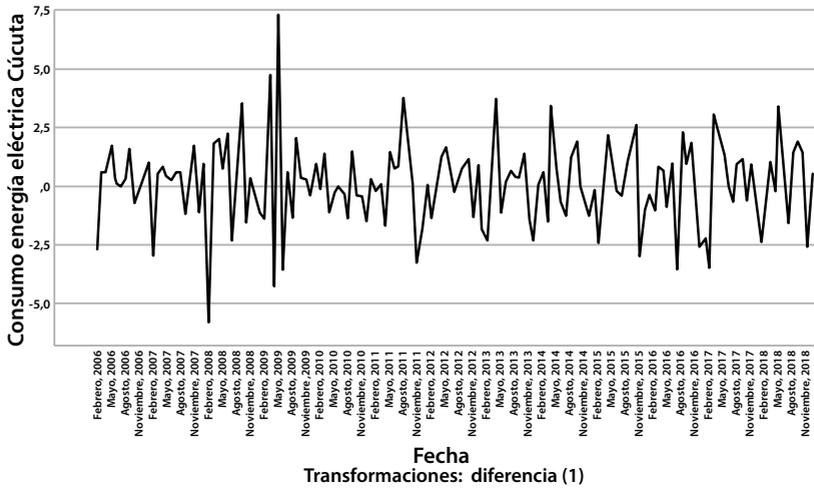
Gráfica 53. Pronóstico del consumo de energía eléctrica en Cúcuta.



3.3.2. Ajuste de un modelo ARIMA

Para el ajuste de un modelo ARIMA a la serie temporal del consumo mensual de energía residencial en Cúcuta, se parte de la serie presentada en la gráfica 50. Esta no es estacionaria porque presenta nivel no constante, esto implica que se debe realizar la primera discordancia. La serie diferenciada se aprecia en la gráfica 54, corresponde a la variable $W_t = Z_t - Z_{t-1}$.

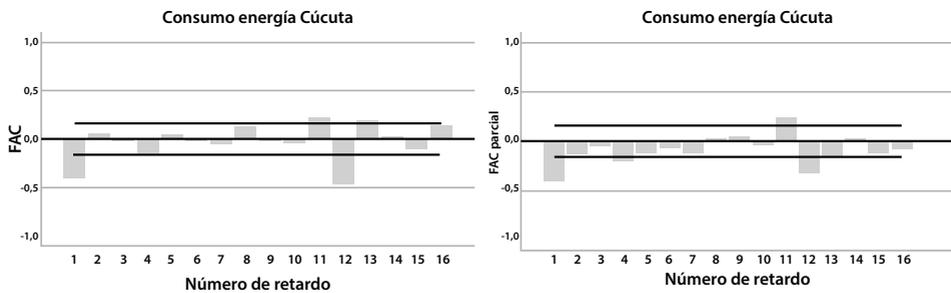
Gráfica 54. Serie diferenciada del consumo de energía eléctrica en Cúcuta.



Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial

Para la identificación del modelo se procede a calcular las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de la serie diferenciada (gráfica 55). Se aprecia una conducta autorregresiva; sin embargo, también se evidencia un comportamiento estacional, lo que sugiere proponer un modelo autorregresivo en los retardos uno y doce.

Gráfica 55. FAC y FACP, consumo de energía eléctrica en Cúcuta.



Estimación del modelo

Con base en la información suministrada por las funciones FAC y FACP, se procede a estimar un modelo ARIMA(1,1,0)x(1,1,0)₁₂, autorregresivo en los retardos uno y doce. Según la prueba de Ljung-Box la serie no presenta datos atípicos y el modelo no incluye constante, pues es significativamente igual a cero.

$$\hat{W}_t = -0.392\hat{W}_{t-1} - 0.459\hat{W}_{t-12} + \hat{a}_t$$

La variable aleatoria W_t está definida en función del operador de retardo B [$B^k Z_t = Z_{t-k}$], de forma tal que involucre la diferenciación de retardo uno y otra estacional de retardo doce:

$$W_t = (1-B)(1-B^{12}) Z_t = (1-B-B^{12}+B^{13})Z_t = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13}$$

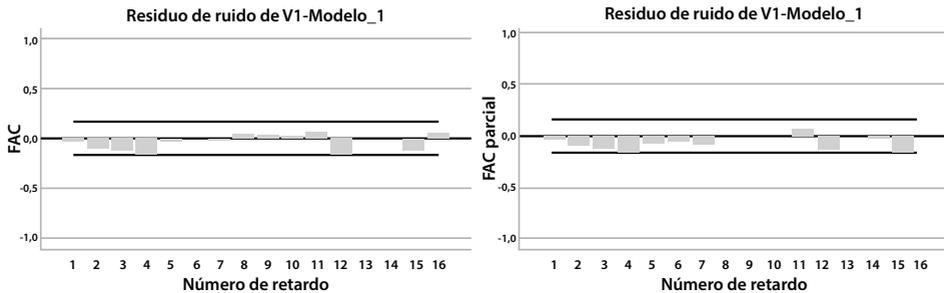
En consecuencia, luego de realizar los remplazos y las simplificaciones correspondientes, se obtiene que la ecuación que rige el modelo asociado al consumo de energía eléctrica residencial en Cúcuta es:

$$\hat{Z}_t = 0.648\hat{Z}_{t-1} + 0.392\hat{Z}_{t-2} + 0.541\hat{Z}_{t-12} - 0.149\hat{Z}_{t-13} - 0.392\hat{Z}_{t-14} + 0.459\hat{Z}_{t-24} - 0.459\hat{Z}_{t-25} + \hat{a}_t$$

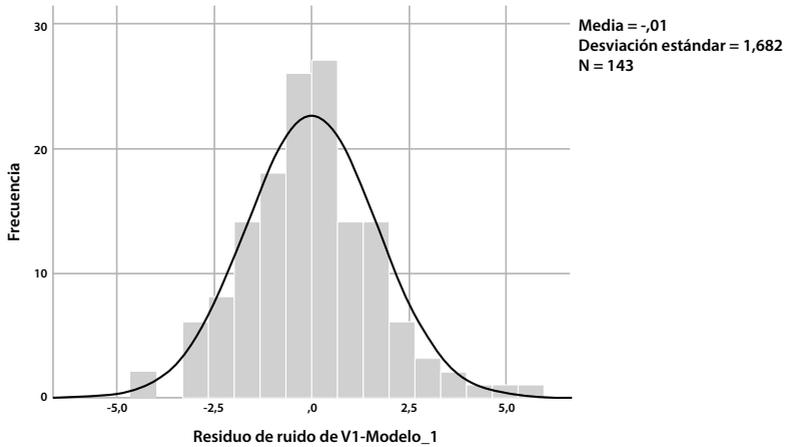
Los estimadores de los parámetros son significativamente diferentes a cero, de conformidad con la prueba *t-student* realizada. En todos los casos, se encontró un p-valor menor que $5 \cdot 10^{-4}$, la constante es significativamente igual a cero.

Análisis de residuales

Gráfica 56. FAC y FACP residuales al modelo de consumo de energía eléctrica de Cúcuta.



La validación del modelo ajustado a los datos es realizada al verificar el cumplimiento de los supuestos del modelo, esto se hace a partir de los residuales. La gráfica 56 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial que permiten concluir que los residuales están incorrelacionados.

Gráfica 57. Distribución empírica de residuales al modelo de consumo de energía eléctrica en Cúcuta.

Los residuales siguen una distribución aleatoria normal (gráfica 57), por tanto, constituyen una serie ruido blanco gaussiano.

3.3.3. Estructura fractal

Para el análisis de la estructura fractal de la serie se calculan los coeficientes de Hurtz (H) y la estadística V. En la tabla 11 se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente ilustrado en la gráfica 58. En la gráfica 49 se evidencia la información correspondiente al análisis V, por lo que se concluye que la serie no contiene ciclos aleatorios.

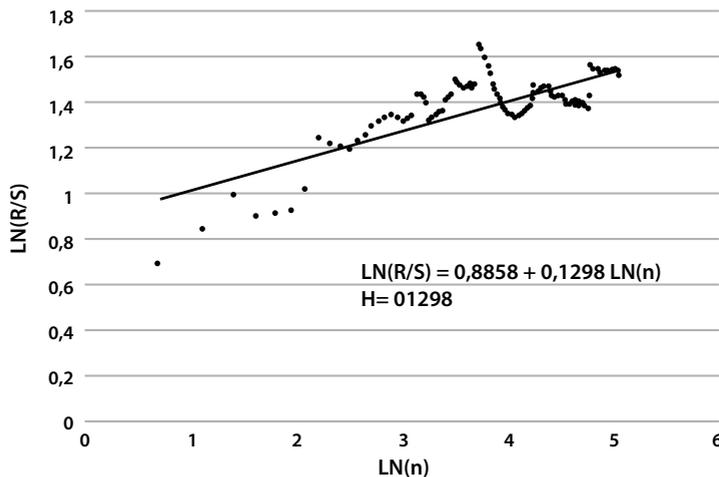
Gráfica 58. Estimación del coeficiente de Hurtz – Consumo de energía eléctrica – Cúcuta.

Tabla 11. Estimación del coeficiente de Hurtz - Consumo de energía eléctrica en- Cúcuta.

Resumen del modelo				
Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
1	,798 ^a	,637	,635	,03797

a. Predictores: (constante), LN(n)

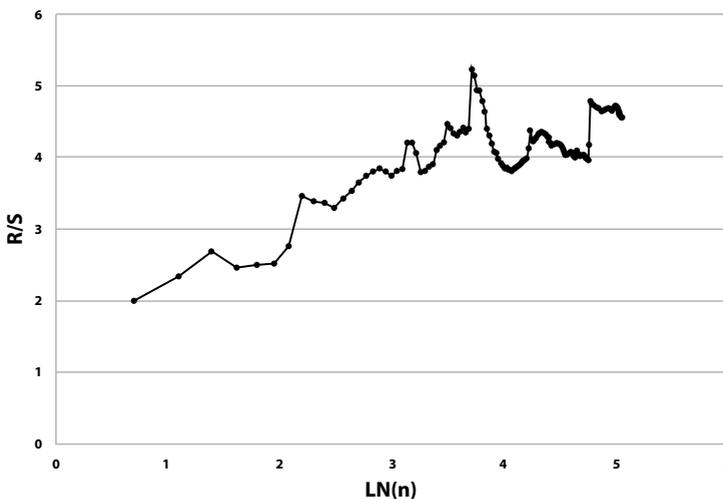
ANOVA ^a						
Modelo		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	,388	1	,388	268,887	,000 ^b
	Residuo	,221	153	,001		
	Total	,608	154			

a. Variable dependiente: LN(R/S)

b. Predictores: (constante), LN(n)

Coefficients ^a						
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Desv. Error	Beta		
1	(Constante)	,385	,014		26,695	,000
	LN (n)	,056	,003	,798	16,398	,000

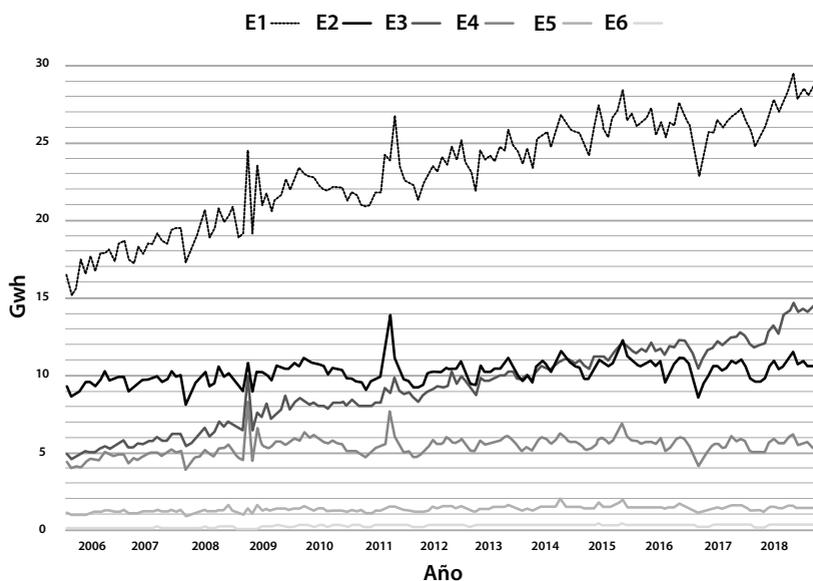
a. Dependent Variable. LN(R/S)

Gráfica 59. Estadística V – Consumo de energía eléctrica – Cúcuta.

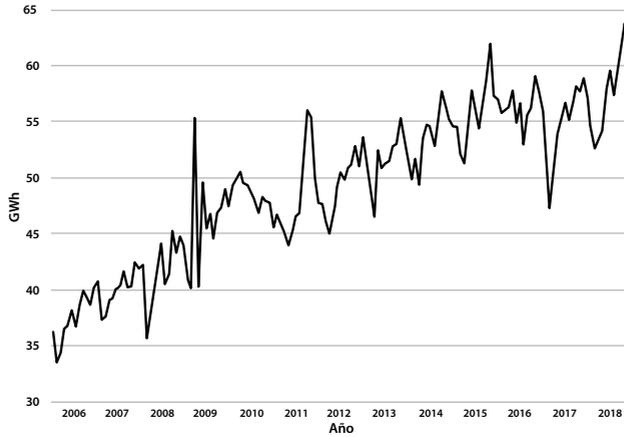
Se infiere, a partir de la información sobre la estructura fractal de la serie de consumo de energía residencial mensual en Cúcuta, que la serie es antipersistente, ya que el exponente Hurts es 0,1298, su dimensión fractal es $2 - 0,1298 = 1,8702$ y la dimensión fractal del espacio de probabilidad asociado es $1 / 0,1298 = 7704$. Lo anterior, también significa que la serie no presenta ciclos aleatorios.

3.4. Consumo residencial de energía eléctrica en Norte de Santander

Gráfica 60. Consumo mensual de energía eléctrica residencial por estrato en Norte de Santander.



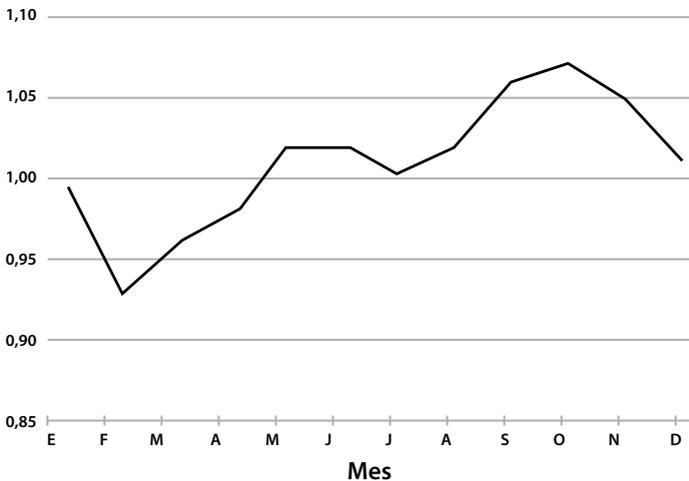
La gráfica 60 muestra el consumo de energía residencial mensual en el departamento Norte de Santander, las cifras son de la empresa Centrales Eléctricas de Norte de Santander (CENS). Están elaboradas con la información consultada en el Sistema Único de Información de Servicios Públicos Domiciliarios (SUI), perteneciente al Sistema de Información Minero Energético Colombiano (SIMEC) (UPME, 2019a; UPME, 2019b). Los valores de la gráfica 50 se agregan para obtener el consumo total del departamento, obteniendo así la gráfica 51, que constituye la base para el modelo a estimar.

Gráfica 61. Consumo mensual de energía eléctrica residencial en Norte de Santander.

3.4.1. Ajuste de un modelo estructural

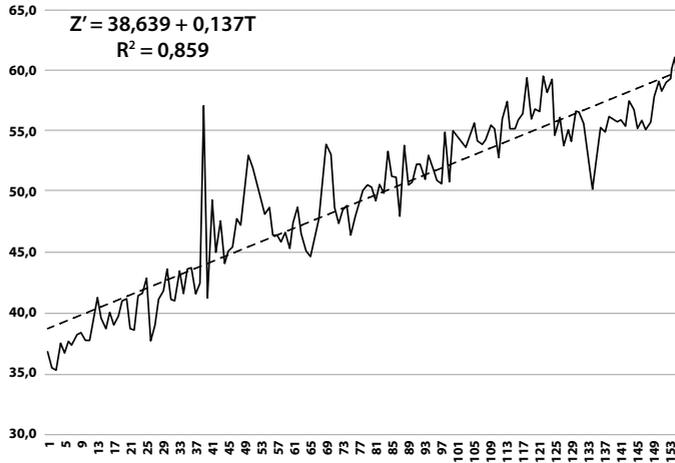
Índice estacional

El índice estacional (gráfica 62), calculado mediante el método de promedio móvil, resulta muy similar al de Cúcuta (gráfica 51), esto se debe, en parte puede, a que la capital es el territorio que más consume energía del departamento, además, es de esperarse que las demás ciudades experimenten un comportamiento similar.

Gráfica 62. Valor del índice estacional del consumo de energía eléctrica NS.

Estimación de la recta de tendencia

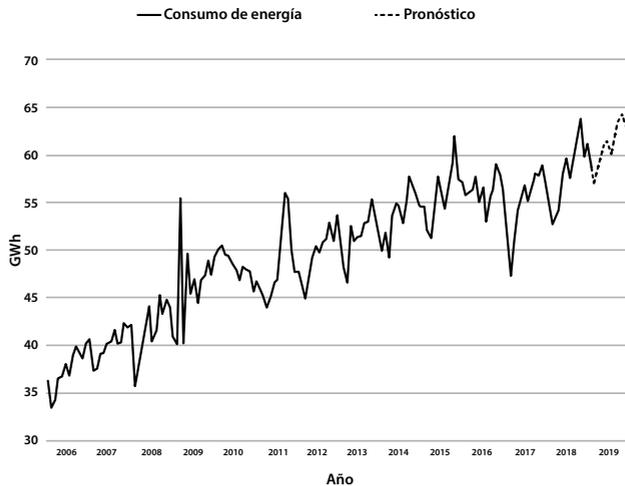
Gráfica 63. Estimación de la recta de tendencia - Consumo de Energía Eléctrica en Norte de Santander.



La componente de tendencia de la serie, obtenida a partir de los datos desestacionalizados, está dada por la ecuación $Z' = 38,639 + 0,137t$. La gráfica 63 muestra un comportamiento creciente, de la serie de datos, y una alta correlación con respecto al indicador de temporalidad.

Cálculo de pronósticos

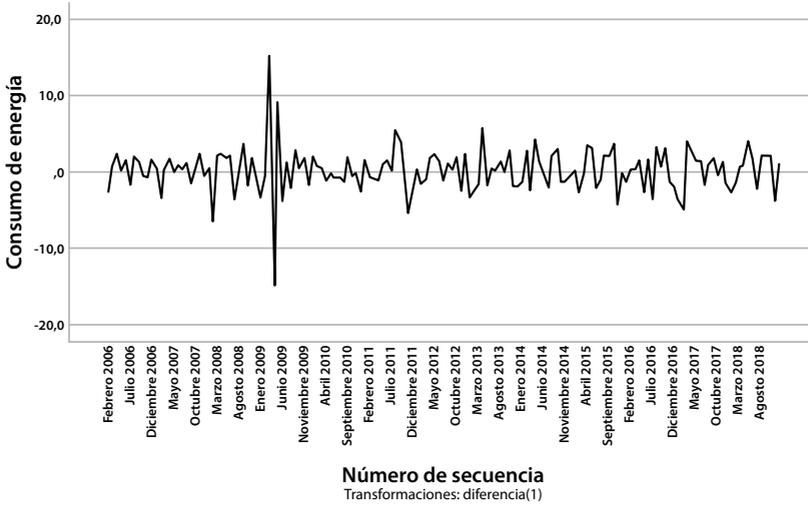
Gráfica 64. Estimación de pronósticos para consumo de energía eléctrica NS.



En la gráfica 64 se aprecia el pronóstico del consumo mensual de energía en Norte de Santander para el año 2019.

3.4.2. Ajuste de un modelo ARIMA

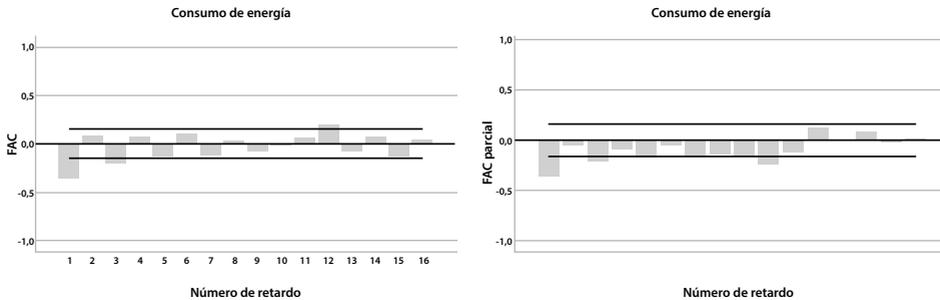
Gráfica 65. Serie diferenciada, consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.



Para el ajuste de un modelo ARIMA a la serie temporal del consumo mensual de energía eléctrica en Norte de Santander, se parte de la serie presentada en gráfica 61, a la cual se le calcula una diferencia de retardo uno para obtener la serie estacionaria de la gráfica 65 correspondiente a la variable $W_t = Z_t - Z_{t-1}$.

Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial

Gráfica 66. FAC y FACP de la serie de consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.



La identificación del modelo se realiza con base en las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de la serie diferenciada (gráfica 66). Se aprecia un comportamiento autorregresivo en el primer retardo; sin embargo, también se evidencia un comportamiento autorregresivo estacional de retardo doce.

Estimación del modelo

Con base en la información suministrada por las funciones FAC y FACP, se procede a estimar un modelo ARIMA(1,1,0)x(1,1,0)₁₂, autorregresivo de promedio móvil en el retardo uno y autorregresivo en el retardo doce. Según la prueba de Ljung-Box, la serie no presenta datos atípicos y el modelo no incluye constante, pues esta es significativamente igual a cero.

$$\hat{W}_t = -0.467\hat{W}_{t-1} - 0.433\hat{W}_{t-12} + \hat{a}_t$$

La variable aleatoria W_t , se precisa en función del operador de retardo B [$B^k Z_t = Z_{t-k}$], de forma tal que involucre la diferenciación de retardo uno y otra estacional de retardo 12:

$$W_t = (1-B)(1-B^{12}) Z_t = (1-B-B^{12}+B^{13}) Z_t = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13}$$

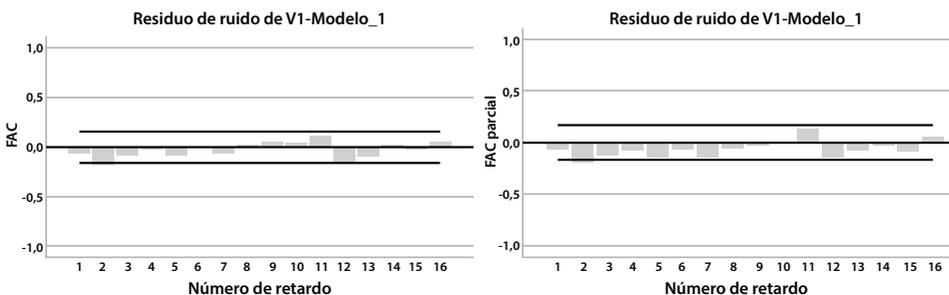
En consecuencia, luego de realizar los remplazos y simplificaciones correspondientes, se obtiene que la ecuación que rige el modelo asociado al consumo de energía eléctrica residencial en el departamento Norte de Santander es:

$$\hat{Z}_t = 0.533\hat{Z}_{t-1} + 0.467\hat{Z}_{t-2} + 0.567\hat{Z}_{t-12} - 0.1\hat{Z}_{t-13} - 0.467\hat{Z}_{t-14} + 0.433\hat{Z}_{t-24} - 0.433\hat{Z}_{t-25} + \hat{a}_t$$

Los estimadores de los parámetros son significativamente diferentes a cero de conformidad con la prueba *t-student* realizada. En todos los casos se encontró un p-valor menor que 5×10^{-4} ; la constante es significativamente igual a cero.

Análisis de residuales

Gráfica 67. FAC y FACP de residuales.



La validación del modelo ajustado a los datos se realiza mediante la verificación del cumplimiento de los supuestos del modelo, efectuada sobre los residuales. La gráfica 67 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial que permiten inferir que los residuales están incorrelacionados.

Además, los residuales siguen una distribución aleatoria normal tal como se evidencia en la gráfica 68 y en la prueba K-S presentada en la tabla 12. En consecuencia, puede inferirse que los residuales constituyen un ruido blanco gaussiano, garantizando así el cumplimiento de los supuestos del modelo estimado.

Gráfica 68. Distribución empírica de residuales al modelo de consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.

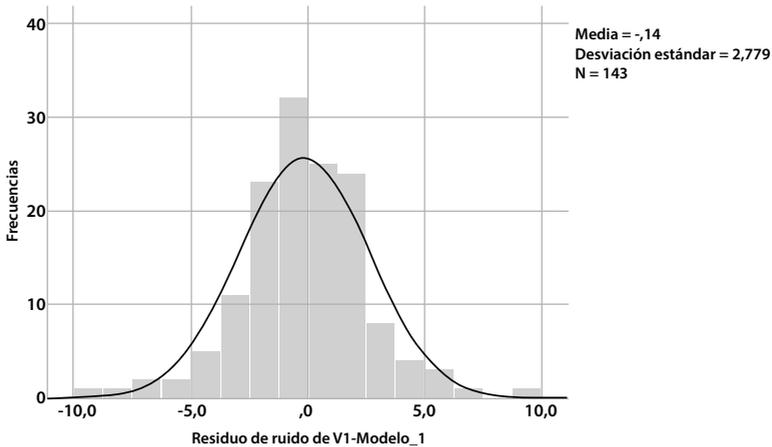


Tabla 12. Prueba de normalidad para los residuales.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra		
		Residuo de ruido de V1-Modelo_1
N		143
Parámetros normales ^{a, b}	Media	-,144
	Desv. Desviación	2,7795
Máximas diferencias extremas	Absoluto	,074
	Positivo	,055
	Negativo	-,074
Estadístico de prueba		,074
Sig. asintótica(bilateral)		,055 ^c
a. La distribución de prueba es normal.		
b. Se calcula a partir de datos.		
c. Corrección de significación de Lilliefors.		

3.4.3. Estructura fractal

Para el análisis de la estructura fractal de la serie se calculan los coeficientes de Hertz (gráfica 69) y la estadística V (gráfica 70). En la tabla 13 se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente Hurts.

Gráfica 69. Estimación del coeficiente de Hertz - Consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.

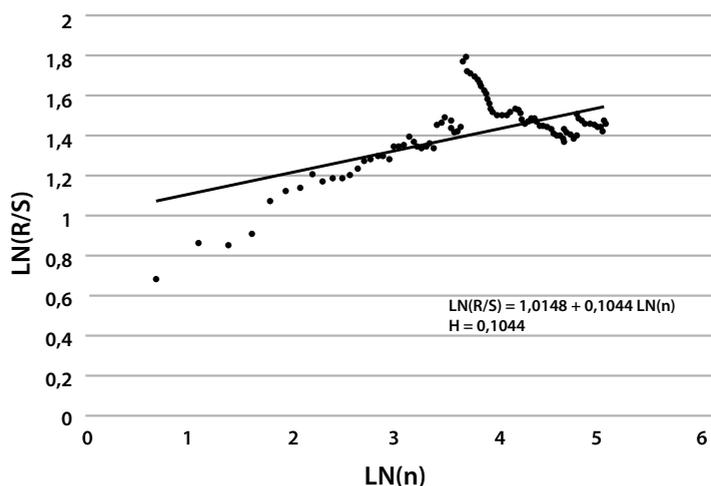


Tabla 13. Estimación del coeficiente de Hertz - Consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.

Resumen del modelo				
Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
1	,628 ^a	,394	,390	,11554

a. Predictores: (constante), LN(n)

ANOVA ^a						
	Modelo	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	1330	1	1330	99,660	,000 ^b
	Residuo	2042	153	,013		
	Total	3373	154			

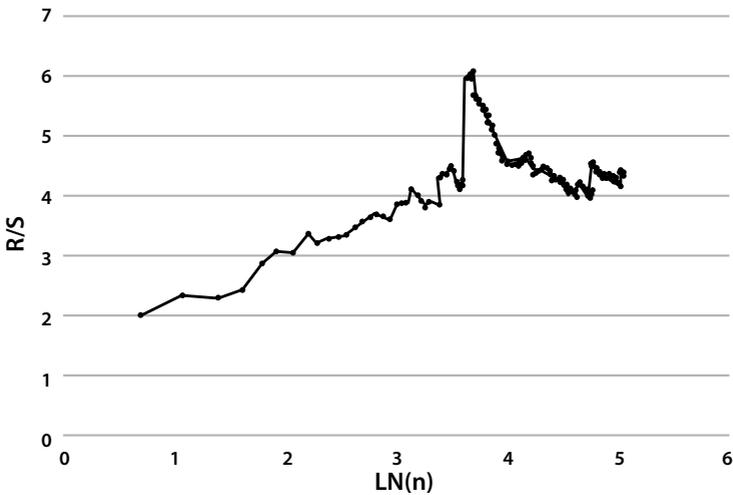
a. Variable dependiente: LN(R/S)

b. Predictores: (constante), LN(n)

Coefficients ^a						
Modelo	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.	
	B	Desv. Error	Beta			
1	(Constante)	1015	,044		23,145	,000
	LN (n)	,104	,010	,628	9,983	,000

a. Dependent Variable. LN(R/S)

Gráfica 70. Estadística V - Consumo de energía eléctrica en Norte de Santander.



Se infiere, a partir de la información sobre la estructura fractal de la serie de consumo de energía residencial mensual en Norte de Santander, que esta serie es antipersistente, ya que el exponente de Hurts es 0,1044, su dimensión fractal es $2 - 0,1044 = 1,8956$ y la dimensión fractal del espacio de probabilidad asociado es $1 / 0,1044 = 9578$; por ello, la serie no presenta ciclos aleatorios.

3.5. Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander

Acerca del sacrificio de ganado, el DANE explica:

[...] El sacrificio es el proceso mediante el cual se da muerte a un animal de manera adecuada evitándole sufrimiento, con el objetivo de utilizar su carne y partes para el consumo y uso humano.

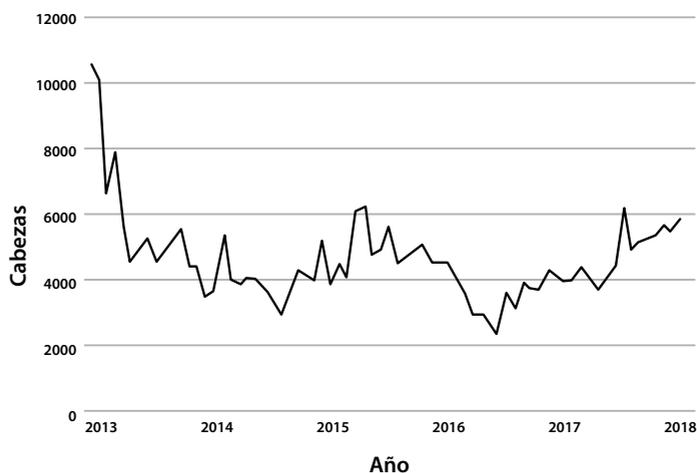
[...]

El Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) realiza la Encuesta de Sacrificio de Ganado (ESAG) con el objetivo de proporcionar información estadística sobre el número de cabezas, peso en pie y peso en canal,

obtenido del sacrificio del ganado mayor (vacuno y bufalino) y menor (porcino, ovino y caprino) para el total nacional y distintos niveles de desagregación. Las fuentes incluyen plantas de beneficio (mataderos y frigoríficos), alcaldías, tesorerías municipales entre otras (DANE, 2019a, p.1).

En esta sección, se limita el estudio al sacrificio de ganado vacuno; sin embargo, el lector puede consultar las bases de datos del DANE y construir modelos para los otros tipos de ganado referidos en el párrafo anterior. Durante el primer trimestre de 2019, Norte de Santander sacrificó 16809 cabezas (5701 en enero, 5317 en febrero y 5791 en marzo), de las cuales 9777 eran machos y 7032 eran hembras, esto constituye el 2% de la producción nacional, la cual se destinó al consumo interno (DANE, 2019a). En la gráfica 71 se presenta el comportamiento mensual del sacrificio de ganado vacuno en el departamento desde 2013 hasta 2018.

Gráfica 71. Sacrificio mensual de ganado vacuno en Norte de Santander.

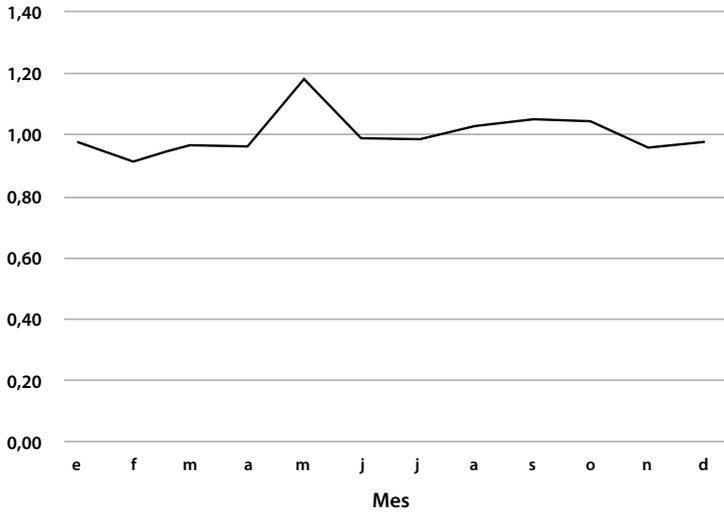


3.5.1. Ajuste de un modelo estructural

El modelo para ajustar a esta serie es de carácter multiplicativo, en este se identifican los componentes: estacional, tendencia e irregular o aleatorio, analizados individualmente con el fin de describir su comportamiento y realizar estimaciones específicas para luego agregarlos en la consolidación del pronóstico.

Índice estacional

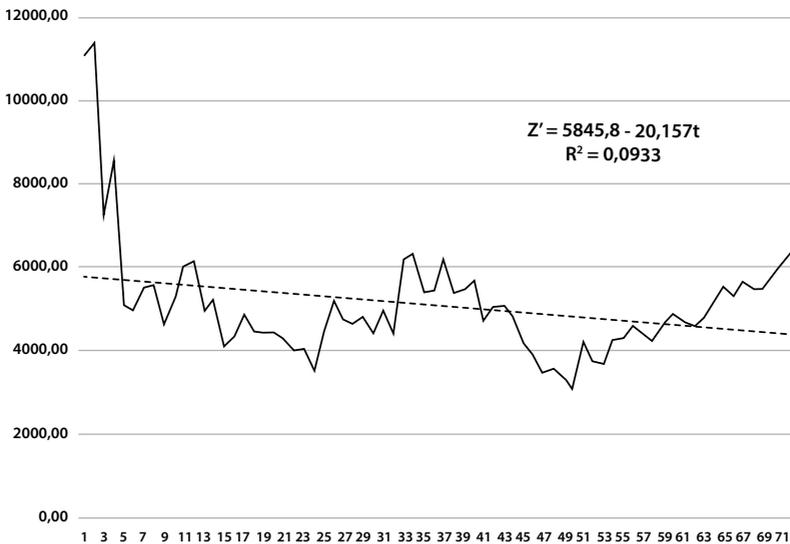
Gráfica 72. Valor del índice estacional - Sacrificio de ganado vacuno – NS.



El índice estacional presentado en la gráfica 72 es calculado mediante el método de promedio móvil. Se aprecia un incremento diferencial en el mes de mayo.

Estimación de la recta de tendencia

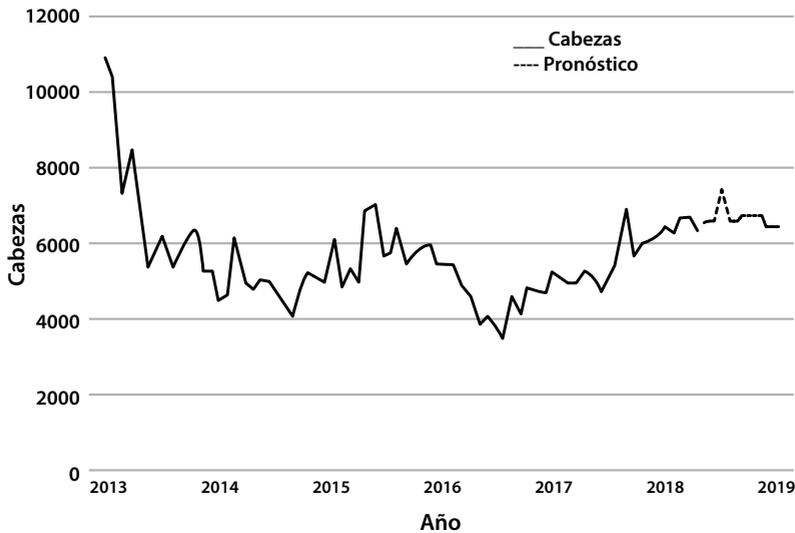
Gráfica 73. Estimación de la recta de tendencia - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.



La componente de tendencia de la serie está dada por la ecuación $Z' = 5845,8 - 20,175t$, ello establece un comportamiento decreciente de la serie a largo plazo. De acuerdo con la gráfica 73 se aprecia un crecimiento de los valores de sacrificio de ganado vacuno en los últimos meses, lo cual puede ser indicio de la presencia de ciclos en la serie; sin embargo, en este trabajo se realizarán los pronósticos a partir de los valores estimados desde la recta de tendencia.

Cálculo de pronósticos

Gráfica 74. Estimación de pronósticos - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.

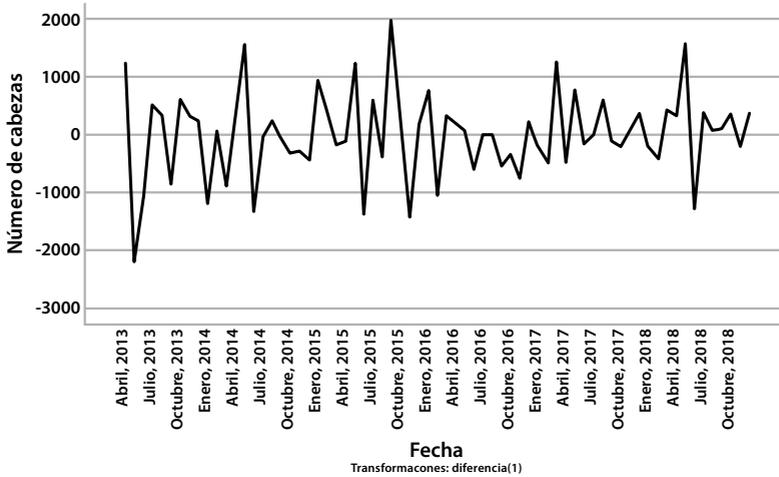


Los pronósticos de esta serie se realizan a partir del modelo descrito, para ello se toma el correspondiente índice temporal y se estima el valor de la tendencia, en seguida se multiplica por el índice estacional. La cifra obtenida estará ajustada a un pronóstico confiable, cuyo error de estimación será dado por la no presencia del componente aleatorio (gráfica 74).

3.5.2. Ajuste de un modelo ARIMA

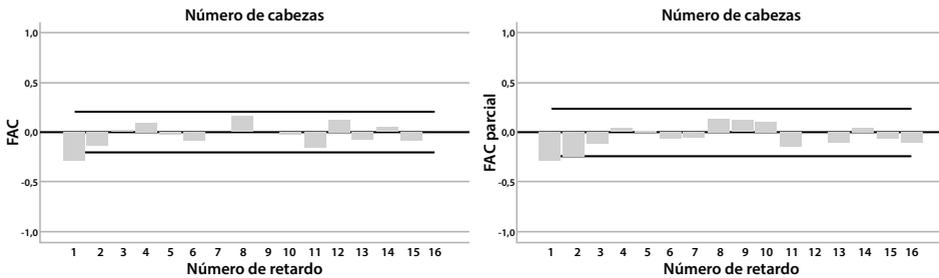
El ajuste de un modelo ARIMA para la serie temporal del sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander, parte de la información representada en la gráfica 71. Esta serie no es estacionaria por cuanto presenta nivel no constante, siendo esta la primera diferencia. La serie diferenciada se aprecia en la gráfica 75, corresponde a la variable $W_t = Z_t - Z_{t-1}$. En la gráfica 76 se presentan las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial correspondientes.

Gráfica 75. Serie diferenciada - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.



Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial

Gráfica 76. FAC y FACP - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.



Estimación del modelo

Con base en la información suministrada por las funciones FAC y FACP, se procede a estimar un modelo $ARIMA(1,1,0) \times (1,1,0)_{12}$ autorregresivo en el retardo uno y autorregresivo en el retardo doce. Según la prueba de Ljung-Box, la serie no presenta datos atípicos, el modelo no incluye constante pues esta es significativamente igual a cero.

La variable aleatoria W_t está definida en función del operador de retardo B [$B^k Z_t = Z_{t-k}$], de forma tal que involucre la diferenciación de retardo uno y otra estacional de retardo doce:

$$\hat{W}_t = -0.285\hat{W}(t-1) + 0.119\hat{W}(t-12) + \hat{a}_t$$

En consecuencia, luego de realizar los remplazos y simplificaciones correspondientes, se obtiene que la ecuación que rige el modelo asociado a la producción de carne bovina en Norte de Santander es:

$$W_t = (1-B)(1-B^{12}) Z_t = (1-B-B^{12}+B^{13})Z_t = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13}$$

Los estimadores de los parámetros son significativamente diferentes de cero de conformidad con la prueba *t-student* realizada. En todos los casos se encontró un p-valor menor que 5×10^{-4} .

$$\hat{Z}_t = 0.715 \hat{Z}_{t-1} + 0.285 \hat{Z}_{t-2} + 1.119 \hat{Z}_{t-12} - 0.834 \hat{Z}_{t-13} - 0.285 \hat{Z}_{t-14} - 0.119 \hat{Z}_{t-24} + 0.119 \hat{Z}_{t-25} + \hat{a}_t$$

Análisis de residuales

La validación del modelo ajustado a los datos se realiza mediante la comprobación del cumplimiento de los supuestos para la estimación, esto se verifica con la realización de los residuales. A partir de la gráfica 77 se deduce que los residuales siguen una distribución normal, lo cual se confirma con los resultados de la prueba K-S presentados en la tabla 14. Las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de los residuales presentadas en la gráfica 78 permiten concluir que están incorrelacionados, por tanto constituyen un ruido blanco gaussiano, satisfaciéndose así los supuestos del modelo.

Gráfica 77. Distribución empírica de residuales - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.

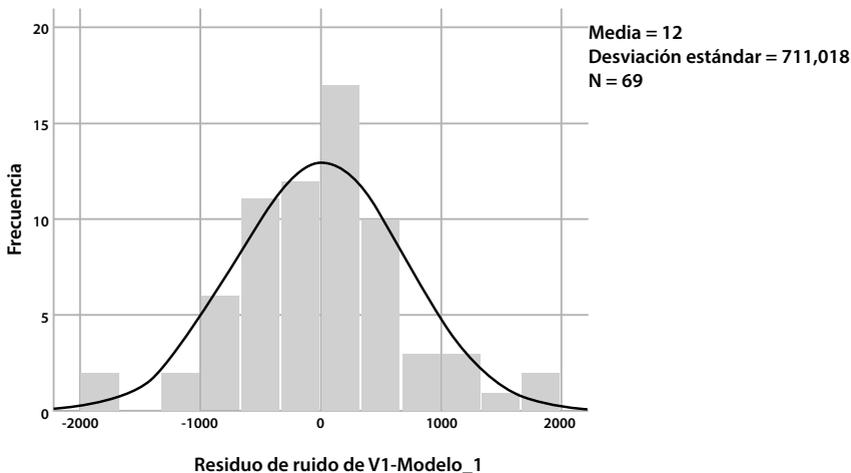
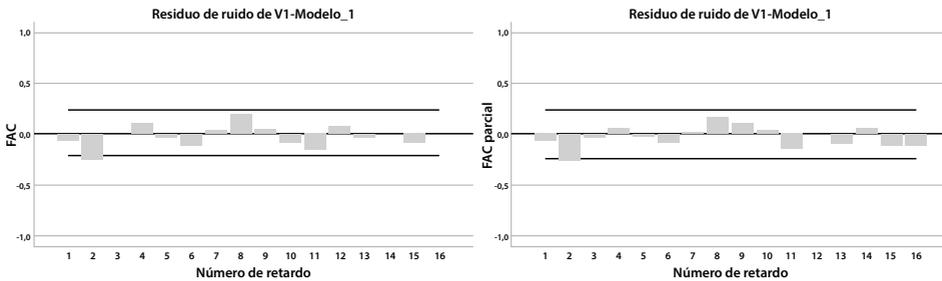


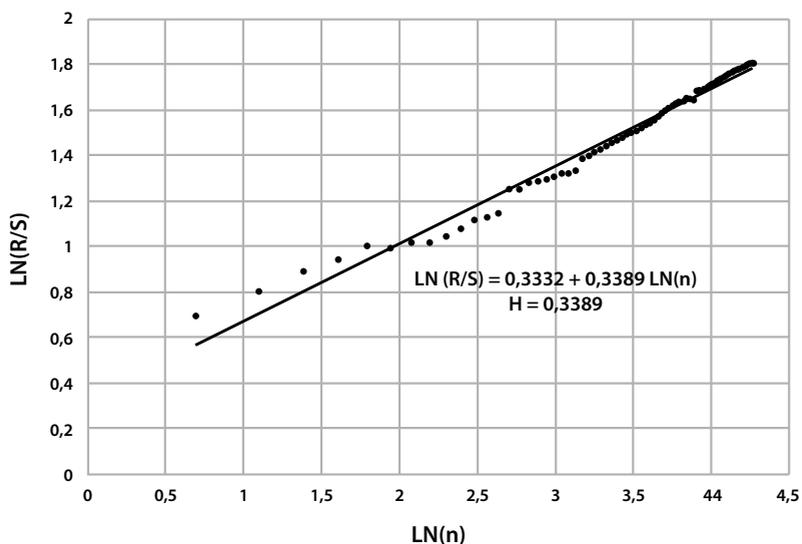
Tabla 14. Prueba normalidad de residuales - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra		
		Residuo de ruido de V1-Modelo_1
N.		69
Parámetros normales ^{a,b}	Media	12,00
	Desv. Desviación	711,018
Máximas diferencias extremas	Absoluto	,079
	Positivo	,079
	Negativo	-,063
Estadístico de prueba		,079
Sig. asintótica (bilateral)		,200 ^{c,d}
a. La distribución de prueba es normal.		
b. Se calcula a partir de datos.		
c. Corrección de significación de Lilliefors.		
d. Esto es un límite inferior de la significación verdadera.		

Gráfica 78. FAC y FACP residuales del modelo de Sacrificio de Ganado Vacuno – NS.

3.5.3. Estructura fractal

El coeficiente de Hertz calculado en la gráfica 79 y la tabla 15, junto con la estadística V obtenida en la gráfica 80, constituyen suficiente información para concluir que la serie no tiene ciclos aleatorios.

Gráfica 79. Estimación del coeficiente de Hurtz - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.**Tabla 15. Estimación del coeficiente Hurtz - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.**

Resumen del modelo				
Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
1	,991 ^a	,981	,981	,03911

a. Predictores: (constante), LN(n)

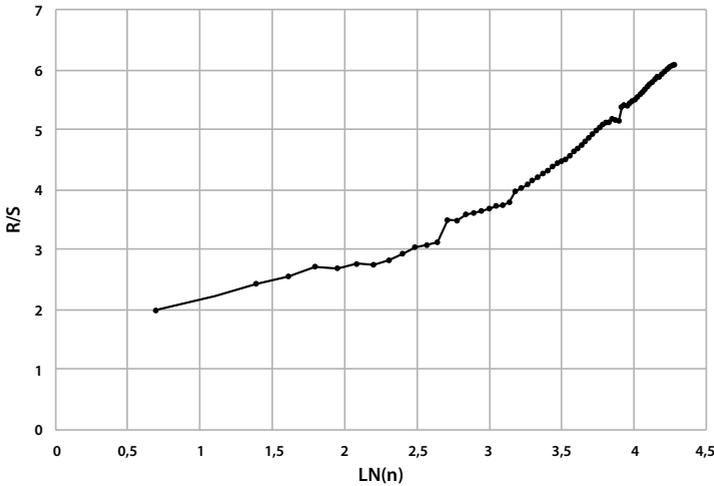
ANOVA ^a						
	Modelo	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	5489	1	5489	3587,927	,000 ^b
	Residuo	,106	69	,002		
	Total	5595	70			

a. Variable dependiente: LN(R/S)

b. Predictores: (constante), LN(n)

Coefficients ^a						
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Desv. Error	Beta		
1	(Constante)	,333	,020		16,999	,000
	LN (n)	,339	,006	,991	59,899	,000

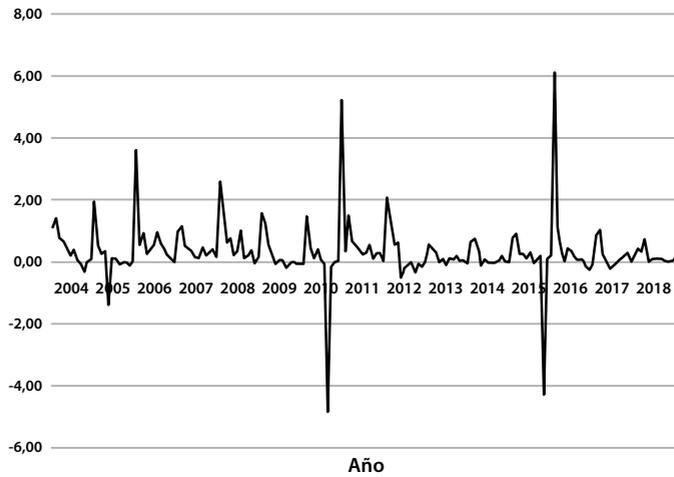
a. Dependent Variable. LN(R/S)

Gráfica 80. Estadística V - Sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander.

Se infiere, a partir de la información sobre la estructura fractal de la serie de sacrificio de ganado vacuno en Norte de Santander, que esta serie es antipersistente ya que el exponente de Hurts es 0,3389, su dimensión fractal es $2 - 0,3389 = 1,6611$ y la dimensión fractal del espacio de probabilidad asociado es $1 / 0,3389 = 2951$. Por lo anterior, la serie no presenta ciclos aleatorios.

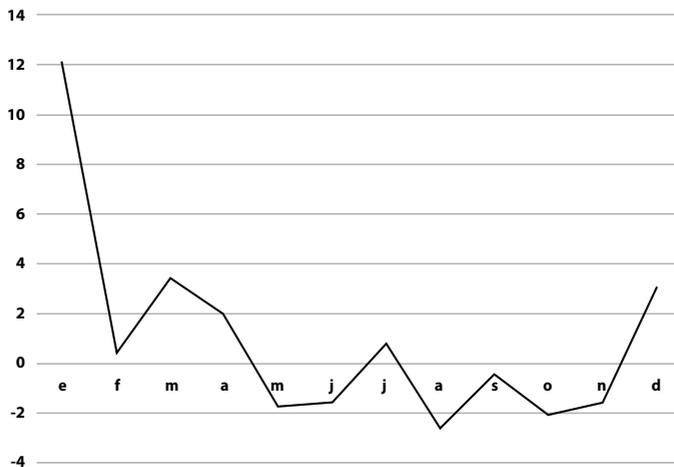
3.6. Índice de Costos de Construcción de Vivienda (ICCV) en Cúcuta

El propósito del ICCV es proveer una medición de la variación mensual promedio, a partir de quince ciudades investigadas por grupos de costos y tipos de vivienda, de los precios s de un conjunto de insumos utilizados para la construcción de vivienda a nivel nacional. La encuesta se realiza en establecimientos económicos especializados en la venta y prestación de servicio de alquiler de equipos y suministro de mano de obra para la construcción de vivienda, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico, estos se encuentran en: Armenia, Barranquilla, Bogotá, Bucaramanga, Cali, Cartagena, Cúcuta, Ibagué, Manizales, Medellín, Neiva, Pasto, Pereira, Santa Marta y Popayán. Los criterios para la inclusión de las fuentes son: representatividad (debe ser especializada en la venta de materiales de la construcción de vivienda), variabilidad de precios entre una fuente y otra, respecto al mismo insumo, con igualdad en especificaciones, unidad de medida y ponderación del insumo (DANE, 2017). En la gráfica 81 se presenta el valor del ICCV para la ciudad de Cúcuta de 2004 a 2018.

Gráfica 81. Índice de costos de construcción de vivienda (ICCV) en Cúcuta.

3.6.1. Ajuste de un modelo estructural

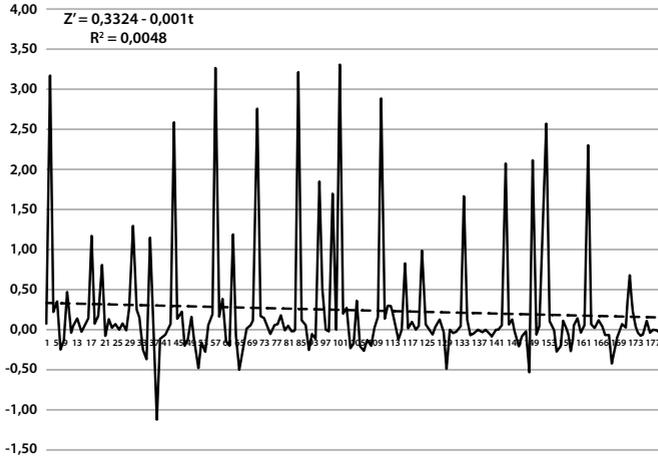
Índice estacional

Gráfica 82. Estimación del índice estacional - ICCV – Cúcuta.

El índice estacional, calculado mediante el método de promedio móvil (gráfica 82), indica mayores precios en la construcción de vivienda en Cúcuta, para los meses de diciembre y enero de cada año.

Estimación de la recta de tendencia

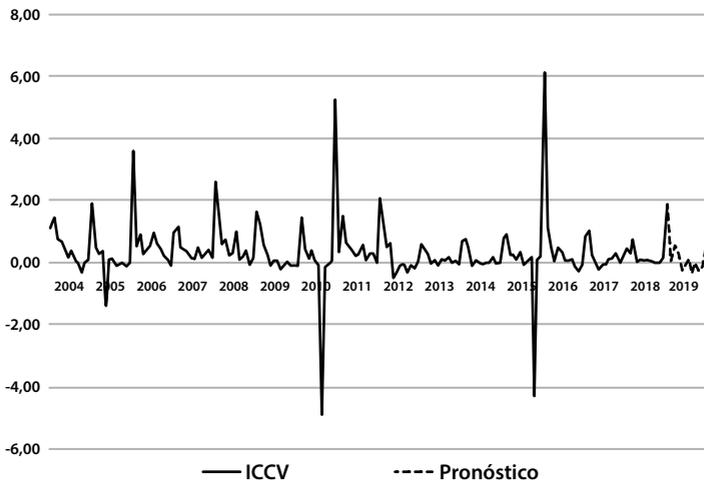
Gráfica 83. Estimación de la recta de tendencia - ICCV – Cúcuta.



Una vez desestacionalizados los datos de la serie se estima la recta de tendencia obteniéndose la ecuación $Z' = 0,3324 - 0,001t$, con un coeficiente de determinación muy bajo: $R^2 = 0,0048$, causado por la alta variabilidad de la información (gráfica 83).

Cálculo de pronósticos

Gráfica 84. Estimación de pronósticos del ICCV en Cúcuta.

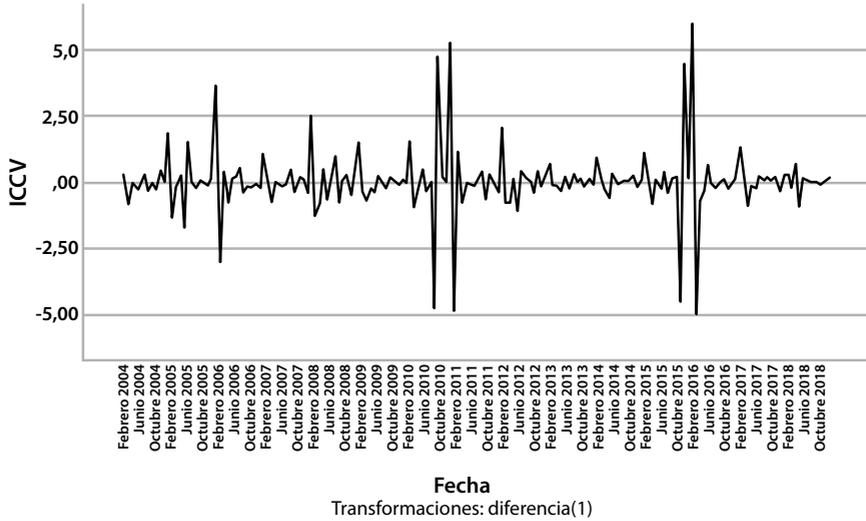


Luego de tener los pronósticos para 2019, mediante la estimación de cada uno de los componentes, se procede a la reconstrucción de la serie (gráfica 84). Los valores así obtenidos estarán ajustados a un pronóstico confiable, cuyo error de estimación estará dado por la no presencia del componente aleatorio.

3.6.2. Ajuste de un modelo ARIMA

Para el ajuste de un modelo ARIMA a la serie temporal del ICCV en Cúcuta, se parte de los valores de la serie presentada en la gráfica 81. Esta es diferenciada en el primer retardo para establecer una estacionaria. La serie diferenciada se aprecia en la gráfica 85, corresponde a la variable $W_t = Z_t - Z_{t-1}$.

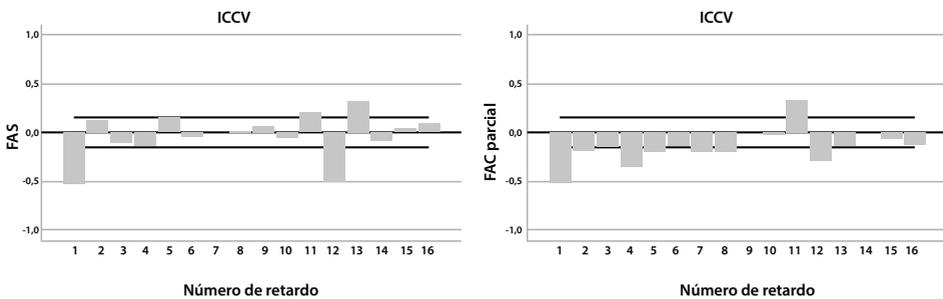
Gráfica 85. Serie diferenciada para ICCV Cúcuta.



Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial

Para la identificación del modelo se procede a calcular las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de la serie diferenciada (gráfica 86). Se aprecia un comportamiento autorregresivo, sin embargo, también se identifica un comportamiento estacional.

Gráfica. 86 FAC y FACP - ICCV de Cúcuta.



Estimación del modelo

Con base en la información suministrada por las funciones FAC y FACP, se procede a estimar un modelo ARIMA(2,1,0)x(1,1,0)₁₂, autorregresivo de grado dos en el retardo uno y autorregresivo en el retardo doce, según la prueba de Ljung-Box, la serie no presenta datos atípicos y el modelo no incluye constante, pues esta es significativamente igual a cero.

$$\widehat{W}_t = -0.604\widehat{W}_{t-1} - 0.182\widehat{W}_{t-2} + 0.461\widehat{W}_{t-12} + \hat{a}_t$$

La variable aleatoria W_t está definida en función del operador de retardo B [$B^k Z_t = Z_{t-k}$], de forma tal que involucre la diferenciación de retardo uno y otra estacional de retardo doce:

$$W_t = (1-B)(1-B_{12}) Z_t = (1-B-B_{12}+B_{13}) Z_t = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13}$$

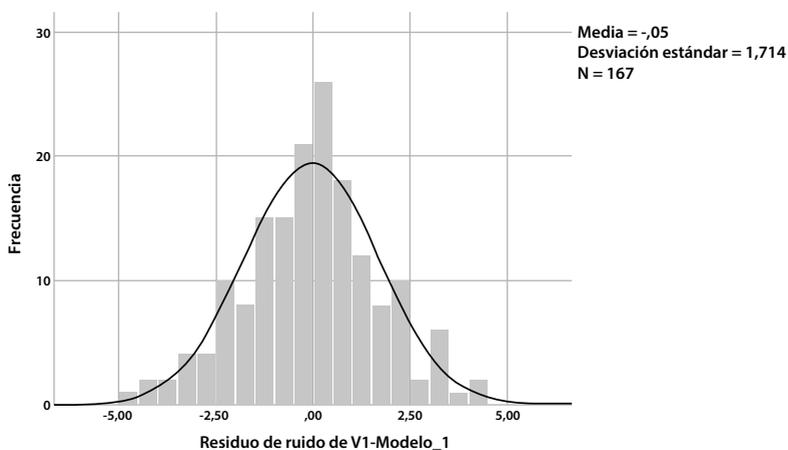
En consecuencia, luego de realizar los remplazos y las simplificaciones correspondientes, se obtiene que la ecuación que rige el modelo asociado a la variación mensual del índice de costos de construcción de vivienda nueva en Cúcuta es:

$$\hat{Z}_t = 0.396\hat{Z}_{t-1} + 0.422\hat{Z}_{t-2} + 0.182\hat{Z}_{t-3} + 1.412\hat{Z}_{t-12} - 0.808\hat{Z}_{t-13} - 0.422\hat{Z}_{t-14} - 0.182\hat{Z}_{t-15} - 0.412\hat{Z}_{t-24} + 0.412\hat{Z}_{t-25} + \hat{a}_t$$

Los estimadores de los parámetros son significativamente diferentes a cero de conformidad con la prueba *t-student* realizada. En todos los casos se encontró un p-valor menor que $5 \cdot 10^{-4}$.

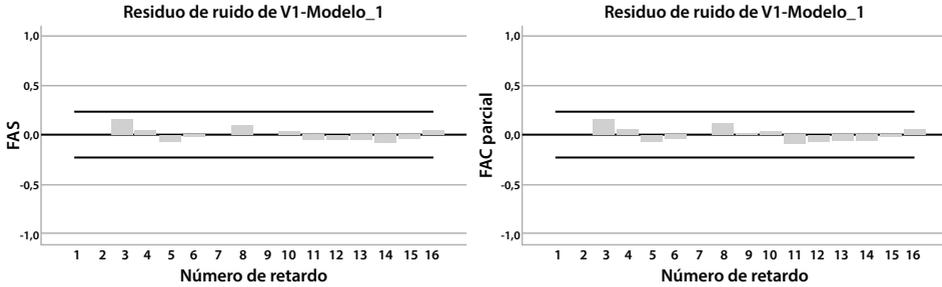
Análisis de residuales

La validación del cumplimiento de los supuestos del modelo ajustado a los datos se realiza mediante la verificación aplicada sobre los residuales. La gráfica 87 y la tabla 16 presentan información estadística que permite inferir que los residuales se distribuyen normalmente con media aritmética cero. Por su parte, la gráfica 88 muestra las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial que permiten concluir que los residuales están incorrelacionados. En consecuencia, se infiere que los residuales siguen un comportamiento ruido blanco gaussiano, posteriormente, se satisfacen los supuestos del modelo propuesto.

Gráfica 87. Distribución empírica de residuales del modelo ICCV – Cúcuta.**Tabla 16. Prueba de normalidad de residuales del modelo ICCV – Cúcuta.**

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra		
		Residuo de ruido de V1-Modelo_1
N.		167
Parámetros normales ^{a,b}	Media	-,0494
	Desv. Desviación	1,71377
Máximas diferencias extremas	Absoluto	,056
	Positivo	,046
	Negativo	-,056
Estadístico de prueba		,056
Sig. Asintótica (bilateral)		,200 ^{c,d}
a. La distribución de prueba es normal.		
b. Se calcula a partir de datos.		
c. Corrección de significación de Lilliefors.		
d. Esto es un límite inferior de la significación verdadera.		

Gráfica 88. FAC y FACP de residuales del modelo ICCV – Cúcuta.



3.6.3. Estructura fractal

Para el análisis de la estructura fractal de la serie, se calculan los coeficientes de Hurtz (H) y la estadística V. En la tabla 16 se presenta la salida de SPSS para la estimación del exponente Hurts ilustrado en la gráfica 89. En la gráfica 90 se presenta la información correspondiente al análisis V, según ella, la serie no contiene ciclos aleatorios.

Gráfica 89. Estimación del coeficiente de Hurtz - ICCV – Cúcuta.

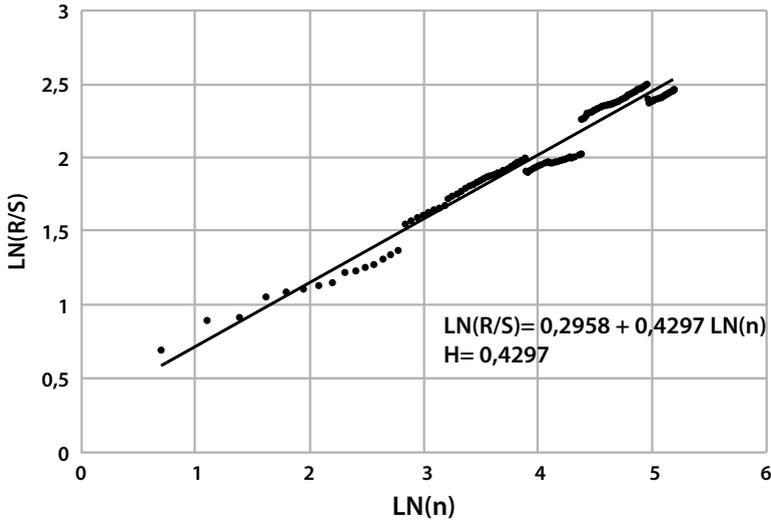


Tabla 17. Estimación del coeficiente de Hurtz - ICCV en Cúcuta.

Resumen del modelo				
Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
1	,980 ^a	,960	,960	,07907

a. Predictores: (constante), LN(n)

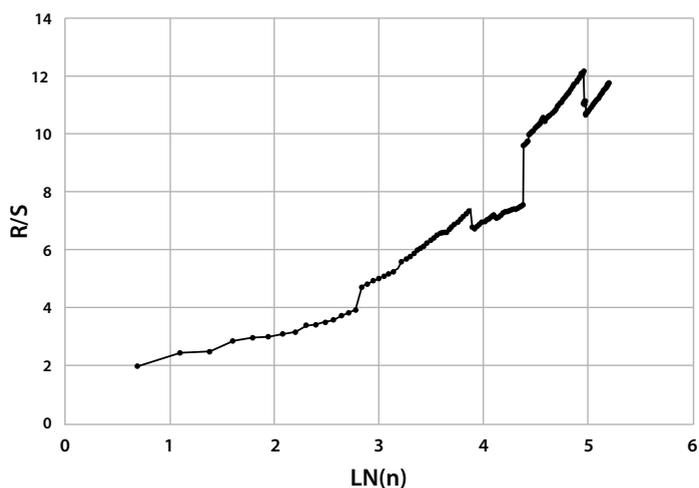
ANOVA ^a						
Modelo		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	26,608	1	26,608	4255,393	,000 ^b
	Residuo	1107	177	,006		
	Total	27,715	178			

a. Variable dependiente: LN(R/S)

b. Predictores: (constante), LN(n)

Coefficients ^a						
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Desv. Error	Beta		
1	(Constante)	,296	,029		10,372	,000
	LN (n)	,430	,007	,980	65,233	,000

a. Dependent Variable. LN(R/S)

Gráfica 90. Estadística V – ICCV – Cúcuta.

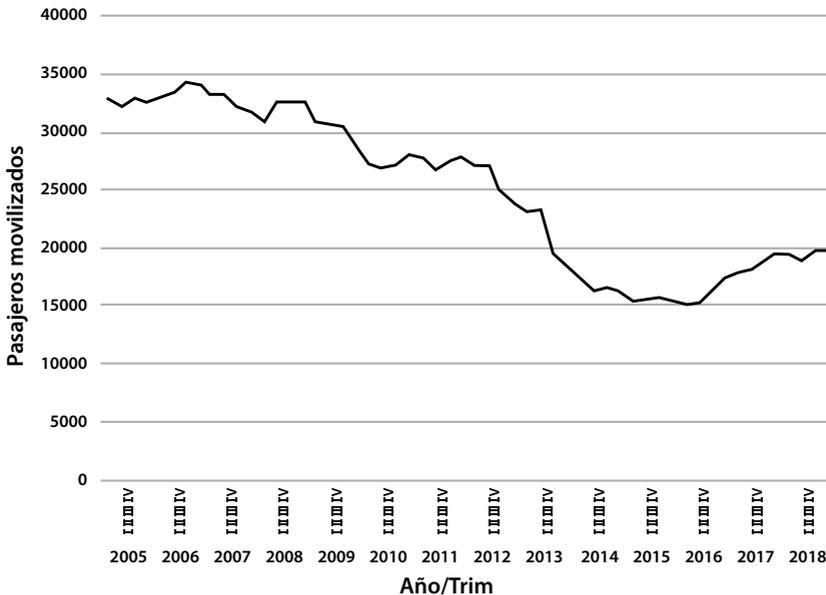
Se infiere, a partir de la información sobre la estructura fractal de la serie ICCV, que esta serie es antipersistente, ya que el exponente de Hurts es 0,4297, su dimensión fractal es $2 - 0,4297 = 1,5703$ y la dimensión fractal del espacio de probabilidad asociado es $1 / 0,4297 = 2,327$, por lo tanto, la serie no presenta ciclos aleatorios.

3.7. Movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta

El DANE realiza, desde 1965, la “Encuesta de Transporte Urbano de Pasajeros”, con el fin de obtener información estadística de carácter censal en 8 áreas metropolitanas y 15 ciudades capitales de los departamentos, relacionada con este medio de transporte público de pasajeros. Recolecta y consolida información diferenciando tipo de vehículo y nivel de servicio; en lo referente al parque automotor clasifica dependiendo de: número de viajes, kilómetros recorridos, pasajeros movilizados y tarifa diurna vigente (DANE, 2019c).

En este documento se hará referencia solamente a la serie del número de pasajeros movilizados por vehículos de transporte público en Cúcuta de 2005 a 2018 (gráfica 91). Para empezar, se debe notar que se presenta un comportamiento decreciente en la serie, similar al de otras ciudades; sin embargo, la identificación y la explicación de las posibles causas de este hecho escapan al alcance de este trabajo.

Gráfica 91. Movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.



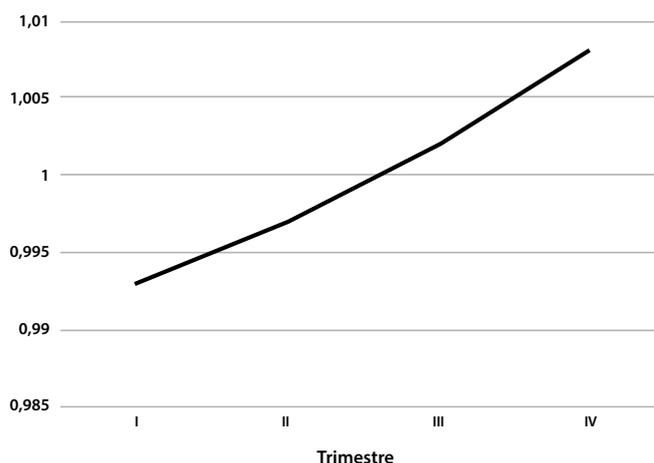
3.7.1. Ajuste de un modelo estructural

El modelo para ajustar consiste en un modelo multiplicativo en el cual se identifican los componentes: estacional, de tendencia e irregular; sin embargo, difiere de los presentados anteriormente, dado que la información aquí registrada está resumida por trimestres. Se analiza por aparte el comportamiento de cada componente con el fin de describirlo, realizar las estimaciones específicas y, luego, agregarlos a la consolidación del pronóstico.

Índice estacional

El índice estacional se calcula mediante el método de promedio móvil con datos trimestrales, esto se puede ver en la gráfica 92. Se aprecia un incremento en los valores a medida que transcurre el año; contrario a ello, los son inferiores los primeros trimestres del año.

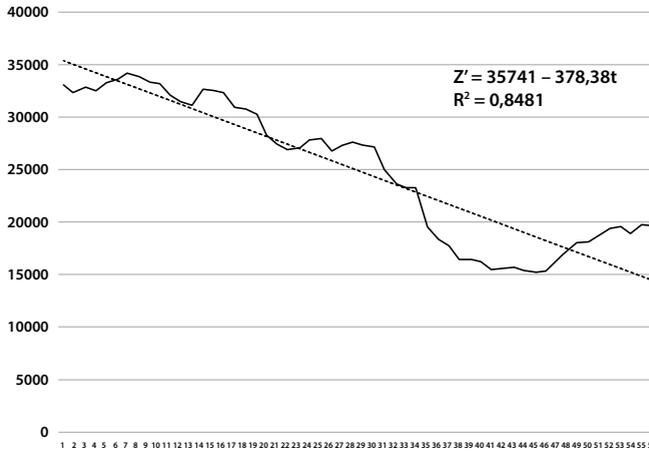
Gráfica 92. Estimación del índice estacional - Movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.



Estimación de la recta de tendencia

La componente de tendencia de la serie está dada por la ecuación $Z' = 35741 - 378t$. La gráfica 93 muestra comportamiento decreciente de la serie de datos desestacionalizados con un coeficiente de terminación del 85%, esto implica que el 85% del cambio en la serie es explicado por la variación en el tiempo de ella misma.

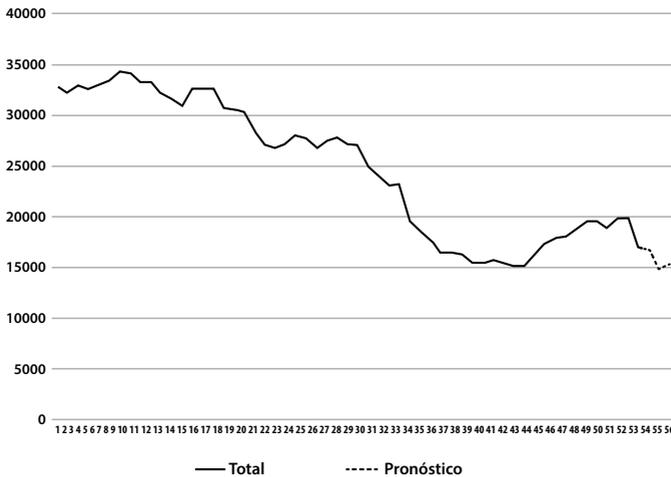
Gráfica 93. Estimación de recta de tendencia - Movimiento del parque urbano Automotor de Pasajeros en Cúcuta.



Cálculo de pronósticos

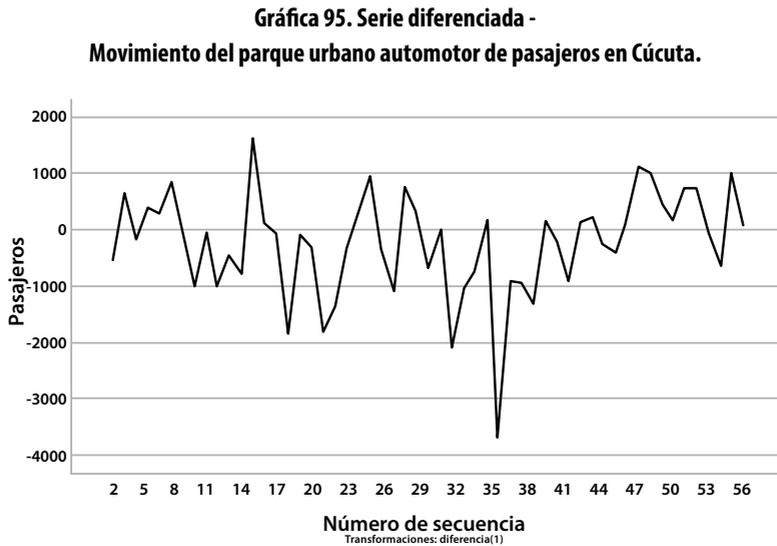
Para realizar pronósticos del año 2019, de la serie con el modelo descrito, se toma el correspondiente índice temporal y se estima el valor de la tendencia, seguidamente se multiplica por el índice estacional. El valor así obtenido estará ajustado a un pronóstico confiable, cuyo error de estimación estará dado por la no presencia de la componente aleatoria, con datos trimestrales, ver gráfica 94.

Gráfica 94. Estimación de pronósticos - Movimiento del parque urbano automotor de pasajeros – Cúcuta.



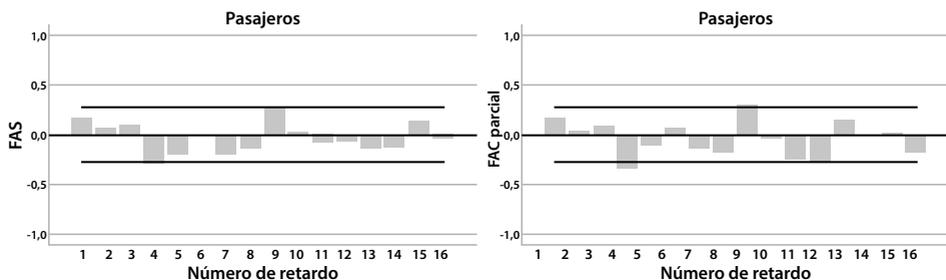
3.7.2. Ajuste de un modelo ARIMA

Para el ajuste de un modelo ARIMA a la serie temporal del movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta, se parte de la información presentada en la gráfica 91. Esta serie no es estacionaria porque presenta nivel decreciente no constante, lo cual implica que se debe realizar la primera distinción. La serie diferenciada en el retardo uno, que en este caso es trimestral, se aprecia en la gráfica 95, corresponde a la variable $W_t = Z_t - Z_{t-1}$.



Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial

Gráfica 96. FAC y FACP movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.



La identificación del modelo se realiza con base en las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de la serie diferenciada (gráfica 96). Allí se aprecia una conducta autorregresiva; sin embargo, también se evidencia un comportamiento estacional.

Estimación del modelo

Basados en la información suministrada por las funciones FAC y FACP, se procede a estimar un modelo ARIMA(1,1,0)x(1,1,0)₄ autorregresivo de grado uno en el retardo uno y autorregresivo de grado uno en el retardo cuatro. Según la prueba de Ljung-Box, la serie no presenta datos atípicos y el modelo no incluye constante, pues esta es significativamente igual a cero.

$$\hat{W}_t = -0.176\hat{W}_{t-1} - 0.291\hat{W}_{t-4} + \hat{\alpha}_t$$

La variable aleatoria W_t está definida en función del operador de retardo B [$B^k Z_t = Z_{t-k}$], de forma tal que involucre la diferenciación de retardo uno y otra estacional de retardo cuatro:

$$W_t = (1-B)(1-B^4) Z_t = (1-B-B^4+B^5) Z_t = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-4} + Z_{t-5}$$

En consecuencia, luego de realizar los remplazos y las simplificaciones correspondientes, se obtiene que la ecuación que rige el modelo asociado a la variación trimestral del movimiento del parque urbano automotor es:

$$\hat{Z}_t = 0.824\hat{Z}_{t-1} + 0.176\hat{Z}_{t-2} + 0.709\hat{Z}_{t-4} - 0.533\hat{Z}_{t-5} - 0.176\hat{Z}_{t-6} + 0.291\hat{Z}_{t-8} - 0.291\hat{Z}_{t-9} + \hat{\alpha}_t$$

Los estimadores de los parámetros son significativamente diferentes a cero de conformidad con la prueba *t-student* aplicada. En todos los casos se encontró un p-valor menor que $5 \cdot 10^{-4}$.

Análisis de residuales

La validación del modelo ajustado a los datos se realiza mediante la verificación del cumplimiento de sus supuestos, esto es efectuado sobre los residuales. La gráfica 97 y la tabla 18 muestran resultados que hacen calcular la normalidad de la distribución empírica de los residuales; por otra parte, la gráfica 98 permite identificar la incorrelación de los residuales. En consecuencia, se consideran como una serie ruido blanco, dándose así cumplimiento a los supuestos soporte del modelo.

Gráfica 97. Distribución empírica de los residuales del modelo movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.

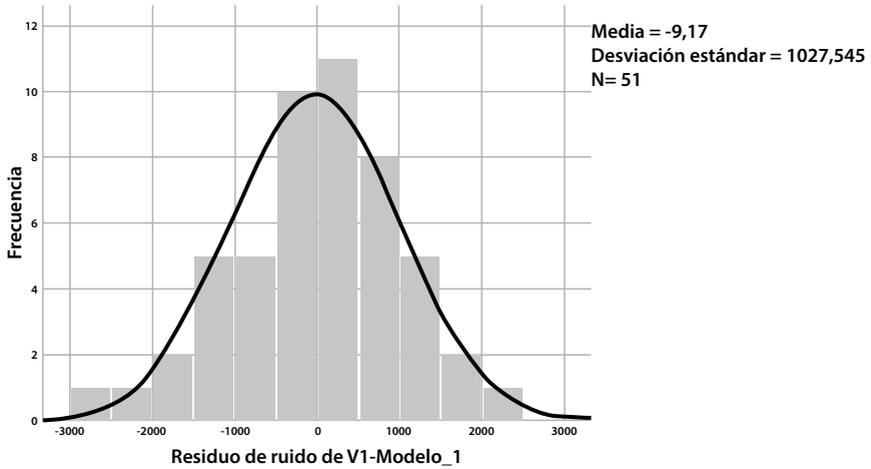
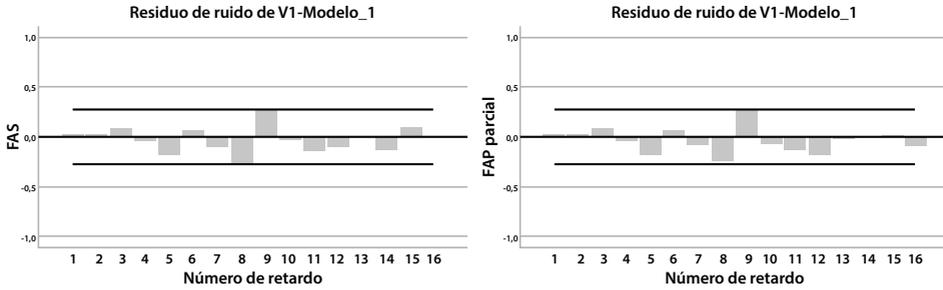


Tabla 18. Prueba de normalidad de residuales del modelo movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra		
		Residuo de ruido de V1-Modelo_1
N.		51
Parámetros normales ^{a,b}	Media	-9,17
	Desv. Desviación	1027,545
Máximas diferencias extremas	Absoluto	,136
	Positivo	,052
	Negativo	-,136
Estadístico de prueba		,136
Sig. asintótica(bilateral)		,020 ^c
a. La distribución de prueba es normal.		
b. Se calcula a partir de datos.		
c. Corrección de significación de Lilliefors.		

Gráfica 98. FAC y FACP residuales del modelo movimiento del parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.



3.7.3. Estructura fractal

Para el análisis de la estructura fractal de la serie se calculan los coeficientes de Hurtz y la estadística V. En la tabla 19 se presenta la salida de SPSS para la estimación del Exponente Hurts ilustrado en la gráfica 99. En la gráfica 100 se presenta la información correspondiente al análisis V, según ella, la serie no contiene ciclos aleatorios.

Gráfica 99. Estimación del coeficiente de Hurtz - Parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.

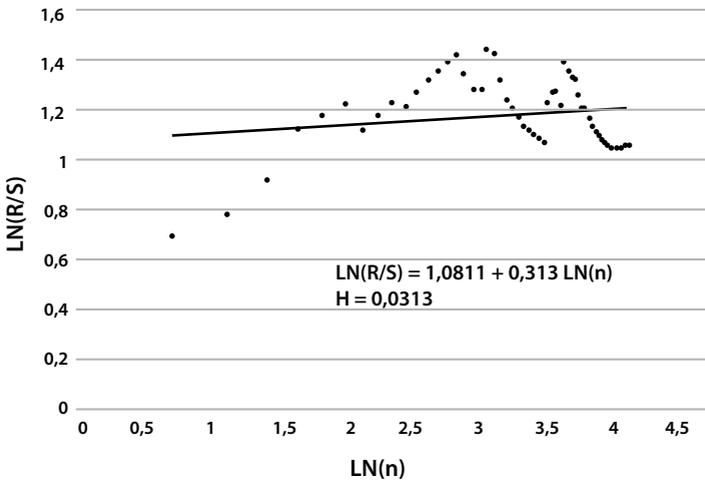


Tabla 19. Estimación del coeficiente de Hurtz - Parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.

Resumen del modelo				
Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
1	,168 ^a	,028	,010	,14835

a. Predictores: (constante), LN(n)

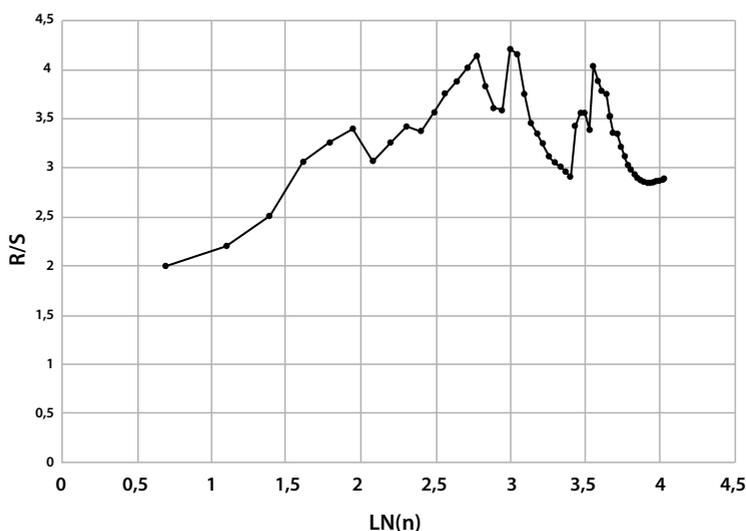
ANOVA ^a						
Modelo		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	,034	1	,034	1537	,221 ^b
	Residuo	1116	53	,022		
	Total	1200	54			

a. Variable dependiente: LN(R/S)

b. Predictores: (constante), LN(n)

Coefficients ^a						
Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Desv. Error	Beta		
1	(Constante)	1081	,082		13,254	,000
	LN (n)	,031	,025	,168	1,240	,221

a. Dependent Variable. LN(R/S)

Gráfica 100. Estadística V - Parque urbano automotor de pasajeros en Cúcuta.

Se infiere, a partir de la información sobre la estructura fractal de la serie del parque urbano automotor de pasajeros, que esta serie es antipersistente, ya que el exponente de Hurts es 0,0313, su dimensión fractal es $2 - 0,0313 = 1,9687$ y la dimensión fractal del espacio de probabilidad asociado es $1 / 0,0313 = 31,95$; por lo tanto, la serie no presenta ciclos aleatorios.

CONCLUSIONES

La geometría fractal ha permitido realizar grandes avances en el análisis de series temporales. Es así como, a partir de la descripción de la estructura fractal de la serie, puede detectarse la existencia de ciclos aleatorios en ella, situación que no obtiene con otros métodos. También es posible determinar la dimensión del espacio de probabilidades asociado y la “memoria” de la serie.

En las series analizadas no se encuentra evidencia de ciclos aleatorios a largo plazo, esto es importante desde el ajuste de modelos de tipo estructural, dado que, no solo facilita la estimación de los demás componentes del modelo, sino que permite realizar pronósticos con mayor grado de confiabilidad.

El propósito fundamental de esta fase de la investigación es incorporar la geometría fractal al desarrollo del análisis de series temporales. Las variables analizadas aquí no solo constituyen un aporte a la economía, sino también a la línea de investigación en este campo. El presente trabajo no se enfatizó en estimar los modelos matemáticos de las series analizadas, ya que no son su propósito fundamental; sin embargo, se realizan algunas estimaciones y propuestas para continuar investigando en esta dirección.

La metodología propuesta por Box y Jenkins, complementada por muchos otros autores o científicos, ha contribuido al desarrollo del análisis de series temporales bajo la construcción de los modelos ARIMA, a la vez que amplió el campo de

acción. Este trabajo las abordó, en una primera parte, a nivel introductorio. Sin embargo, analizar por separado a cada una de ellas, en el ámbito completo de esta metodología, da lugar a nuevos trabajos de investigación.

La caracterización fractal de las series da información básica para su análisis; sin embargo, existe todavía un largo camino por recorrer acerca de este tópico, por ello este se tratará en un próximo proyecto de investigación. Por último, es conveniente abordar en un nuevo proyecto el uso de modelos de series TAR: *Threshold Autoregressive Models*, univariados y multivariados, con el propósito de analizar series cronológicas que permitan establecer posibles explicaciones a las variaciones identificadas en las series temporales presentadas y en otras del sector productivo regional.

BIBLIOGRAFÍA



- Alonso, A. (s.f.). *Introducción al análisis de series temporales*. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid.
- Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere*. New York: Academic Press.
- BANREP. (2019). Índice de Precios al Consumidor. Bogotá
- Box, G. y Jenkins, G. (1969). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. San Francisco: Holden Day.
- Burgos, T. y Pérez, E. (1999). Estimation of the Fractal Dimension of a Rainfall Time Series over a Zone Relevant to the Agriculture in Havana. *SOMETCU-BA Bulletin*. 5(1).
- Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). (2017). Ficha metodológica. *Índice de costos de construcción de vivienda*. Bogotá.
- DANE. (2019a). Boletín técnico. *Encuesta de sacrificio de ganado*. Bogotá.
- DANE. (2019b). Boletín técnico. *Índice de precios al consumidor*. Bogotá.
- DANE. (2019c). Boletín técnico. *Movimiento del parque urbano automotor de pasajeros*. Bogotá.
- Fernández, S. (s.f.). *Series temporales*. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid.
- Gallardo, H. y Nieto, F. (1996). Cálculo del número mínimo de datos necesarios para estimar el vector de observaciones faltantes en una serie temporal generada por un modelo AR (p). *Revista Colombiana de Estadística*. 33-34:57-76.
- Gao, J., Cao, Y., Tung, W. y Hu, J. (2007). *Multiscale Analysis of Complex Time Series: Integration of Chaos and Random Fractal Theory, and Beyond*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Gras, J. (2001). *Diseño de series temporales: técnicas de análisis*. Barcelona: EUB.
- Guerrero, V. (2003). *Análisis estadístico de series de tiempo económicas*. México: Universidad Autónoma Metropolitana.
- González, V. y Guerrero, C. (2001). Fractales: fundamentos y aplicaciones, parte I: concepción geométrica en la ciencia e ingeniería. *Ingenierías*, 4(10), 53-59.
- Mandelbrot, B. (1985). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman.

- Mandelbrot, B. (1993). *Los objetos fractales: forma, azar, dimensión*. (3ª ed.). Barcelona: Tusquets Editores S.A.
- Nova, A. (2013). *Procesamiento de series de tiempo*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Peña, D. (1990). *Estadística modelos y métodos: 2. Modelos lineales y series temporales*. Barcelona: Alianza Editorial.
- Peña, D. (2010). *Análisis de series temporales*. Barcelona: Alianza Editorial.
- Peña, D. y Maravall, A. (1991). Interpolation, Outliers and Inverse Auto-Correlations. *Communication in Statistics - Theory Meth*, 20(10),3175-3186.
- Nieto, F. y Martínez, J. (1994). A Recursive Approach for Estimating Missing Observations in a Time Series when the ARIMA Model for of Process Known. *Communication in Statistics - Theory and Methods*, 25(9),2101-2116.
- Quintero, O. y Ruiz, J. (2011). Estimación del exponente de Hurst y la dimensión fractal de una superficie topográfica a través de la extracción de perfiles. *Geomática UD.GEO* (5), 84-91.
- Unidad de Planeación Minero-Energética (UPME). (2019). Boletín estadístico de minas y energía. Bogotá: Minminas.
- UPME. (2019). *Sistema de información minero energético colombiano*. Bogotá: SI-MEC.

Este libro fue compuesto en caracteres Minion
a 11 puntos, impreso sobre papel Bond de 75
gramos y encuadernado con el método hot melt,
en octubre de 2019, en Bogotá, Colombia.

Modelación de series temporales en el sector productivo del Norte de Santander

Esta investigación se fundamenta en la aplicación de referentes teóricos al análisis y caracterización de series temporales univariadas, dedicadas a la construcción y validación de modelos que explican el comportamiento en el tiempo de variables relacionadas con el sector económico y productivo del departamento Norte de Santander, ilustrando la aplicabilidad en estimación de modelos ARIMA y el análisis de la estructura fractal de la serie.

El libro se estructura en tres partes: la primera presenta los fundamentos teóricos para el análisis de series cronológicas, incluyendo el modelo estructural, el ARIMA y la estructura fractal; en la segunda se realizan simulaciones para identificar, comprender y aplicar la temática desarrollada y, la tercera, su aplicación al análisis de series económicas del departamento Norte de Santander.

Dirigido a estudiantes y profesionales en áreas de matemáticas, estadística, ingeniería y ciencias empresariales, interesados en aplicaciones de métodos estadísticos y el análisis intertemporal de variables económicas.

Incluye

- ▶ Análisis de series temporales al tiempo que examina su estructura para facilitar su modelación generando pronósticos confiables.
- ▶ El análisis de series temporales utilizando modelos como el estructural, ARIMA y fractal.
- ▶ Estudio y análisis en el tiempo de series económicas del Departamento Norte de Santander.
- ▶ Resultados y procedimientos que el lector puede extrapolar a otros contextos.

Henry de Jesús Gallardo Pérez

Licenciado en Matemáticas y Física, Especialista en Estadística, Magíster en Economía, Doctor en Educación. Profesor titular adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, investigador Categoría Asociado en Colciencias. Ha ocupado cargos como Director de la Especialización en Estadística Aplicada, Director de la Maestría en Educación Matemática, Jefe de la División de Posgrados y Jefe de la División de Sistemas.

Jhan Piero Rojas Suárez

Ingeniero Civil, Especialista en Sistemas de Información Geográfica, Especialista en Sistemas Gerenciales de Ingeniería, Magíster en Ingeniería Civil, estudiante de Doctorado en Proyectos. Profesor asistente adscrito al Departamento de Construcciones Civiles, Vías y Transportes. Ha ocupado cargos como Director del Departamento de Construcciones Civiles, Vías y Transportes, Decano de la Facultad de Ingeniería, Vicerrector de Investigación y Extensión.

Oscar Alberto Gallardo Pérez

Ingeniero de Sistemas y Computación, Especialista en Informática Educativa, Magíster en Computación, estudiante de Doctorado en Proyectos. Profesor adscrito al Departamento de Sistemas e Informática. Investigador Categoría Junior de Colciencias. Ha ocupado cargos como director del Programa de Ingeniería de Sistemas, Jefe del Departamento de Sistemas e Informática y Coordinador de Autoevaluación.



Universidad Francisco
de Paula Santander
Vigilada Mineducación

